

## CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 10 gennaio 2002

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

**Vecchio Ordinamento:1-6**

1. - Da un lotto contenente 4 pezzi buoni e 2 difettosi si estraggono senza restituzione 3 pezzi. Sia  $X$  il numero aleatorio di pezzi buoni estratti. Sia inoltre  $E_i$  l'evento "*l'i-mo pezzo estratto è buono*". Calcolare la varianza di  $X$  e la probabilità  $\alpha$  dell'evento condizionato  $E_1 \wedge E_3 | E_1 \vee E_3$ .

$$\text{Var}(X) = \frac{2}{5} \qquad \alpha = \frac{3}{7}$$

2. - Siano  $X$  e  $Y$  due numeri aleatori indipendenti aventi entrambi distribuzione normale con parametri  $m, \sigma$ . Considerati i numeri aleatori  $U = X - Y, V = X + Y, Z = aX + bY$ , calcolare la covarianza di  $U, V$  e i valori di  $a$  e  $b$  tali che  $Z$  abbia distribuzione normale standard.

$$\text{Cov}(U, V) = 0 \qquad a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \qquad b = \mp \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$$

3. - La lunghezza di una barra è un numero aleatorio  $X$  con densità della forma

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq a \\ 2a - x & a < x \leq 2a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare la costante  $a$  e la funzione di ripartizione di  $X$ .

$$a = 1 \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2} & , \quad 0 < x \leq 1 \\ 2x - 1 - \frac{x^2}{2} & , \quad 1 < x \leq 2 \\ 1 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

4. - Un lotto è costituito da 50 componenti, dei quali 20 sono stati costruiti da una macchina  $M_1$  e 30 da una macchina  $M_2$ . Il generico componente risulta difettoso con probabilità  $\frac{1}{4}$  se prodotto da  $M_1$  e con probabilità  $p$  se prodotto da  $M_2$ . Dal lotto viene estratto a caso un componente e viene esaminato. Calcolare, in funzione di  $p$ , la probabilità  $\alpha$  dell'evento  $E =$  "*Il pezzo esaminato risulta non difettoso*" e la probabilità  $\beta$  dell'evento condizionato  $H|E$ , essendo  $H$  l'evento "*Il pezzo esaminato è stato prodotto dalla macchina  $M_1$* ". Infine, calcolare il valore di  $p$ , tale che  $E$  ed  $H$  risultano stocasticamente indipendenti.

$$\alpha = \frac{9}{10} - \frac{3}{5}p \qquad \beta = \frac{1}{3 - 2p} \qquad p = \frac{1}{4}$$

5. - Un circuito elettronico è dotato di  $n$  chip le cui durate sono variabili aleatorie stocasticamente indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro 2. Il circuito elettronico funziona se almeno uno dei chip funziona. Determinare il numero minimo  $k$  di chip necessari affinché la probabilità  $p$  che il circuito elettronico duri più di 2 anni sia almeno del 95%.

$$k = \left\lceil \frac{\ln 0.05}{\ln(1 - e^{-4})} \right\rceil + 1 = 163$$

6. - Sia  $(X, Y)$  un vettore aleatorio con distribuzione  $f(x, y) = \frac{e^{-x-y}}{1-2e^{-1}}$  nel triangolo di vertici  $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$  e 0 altrove. Stabilire se  $X$  ed  $Y$  sono scambiabili e/o stocasticamente indipendenti.

$X$  e  $Y$  sono scambiabili?    ☒ sì    ☐ no

$X$  e  $Y$  sono stocasticamente indipendenti?    ☐ sì    ☒ no