CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 13 settembre 2001

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

Corso intero (V.O.)

1. - Siano A, B, C tre eventi tali che $A \vee B \vee C = \Omega$, con probabilità rispettivamente $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{6}$, $P(C) = \frac{1}{2}$. Stabilire se l'assegnazione di probabilità è coerente.

COERENTE ? NO

2. - La quantità di rifiuti solidi smaltiti da un'industria in ciascuna giornata è un numero aleatorio X con densità della forma

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ h(2-x) & 1 < x \leq 2 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Sapendo che $P(X \leq \frac{1}{2}) = \frac{1}{24}$, determinare le costanti h e k. Calcolare la previsione di X.

$h = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $k = 1$ $\qquad$ $\mathbb{P}(X) = \frac{41}{36}$

3. - Siano X e Y due numeri aleatori indipendenti aventi entrambi distribuzione esponenziale con lo stesso parametro λ. Determinare la covarianza $cov(X,Y)$ e, considerato $U = X - Y$, determinare la previsione $\mathbb{P}(U)$, la varianza $var(U)$, la probabilità $P(U > 0)$.

$\mathbb{P}(U) = 0$ $\qquad$ $cov(X,Y) = 0$ $\qquad$ $var(U) = \frac{2}{\lambda^2}$ $\qquad$ $P(U > 0) = \frac{1}{2}$

4. - Un numero aleatorio X non negativo ha funzione di sopravvivenza $S(x) = e^{-(ax+\frac{bx^2}{2})}$, per $x \geq 0$. Calcolare, per ogni $x > 0$, la densità $f(x)$, determinando l'insieme I dei valori da assegnare alle costanti a e b. Inoltre, stabilire per quali valori di a e b è soddisfatta la condizione $P(X > x + y | X > y) = P(X > x)$, $\forall x > 0, y > 0$.

$f(x) = (a+bx)e^{-(ax+\frac{bx^2}{2})}, \ x > 0$ $\qquad$ $I = \{(a,b) \ : a \geq 0, b \geq 0\} \backslash (0,0)$ $\qquad$ $a > 0, \quad b = 0$

5. Un centralino riceve delle telefonate secondo un processo di Poisson $N(t)$ di intensità μ. Qual è la distribuzione del tempo Y tra due telefonate successive e quella del numero aleatorio $Z = 2\mu Y$?

$f_Y(y) = \mu e^{-\mu y}, \ y > 0$ $\qquad$ $f_Z(z) = \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{2}}, \ z > 0$

6. Sia (X,Y) un vettore aleatorio bidimensionale di densità

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda y e^{-y(x+\lambda)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

ove λ è un parametro positivo. Determinare se X ed Y sono scambiabili e calcolare la densità di $X | \{Y = y\}$.

X, Y SCAMBIABILI ? NO

$$f_{X|y}(x) = \begin{cases} y e^{-yx} & x > 0 \\ 0 & altrove \end{cases}$$