CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 20 settembre 2003

Vecchio Ordinamento:1–6; Elettronica, Informatica, Automatica:1–4,
Civile, Trasporti:1–3, Nettuno:1,2,4.
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Dati gli eventi A, B, C, con $A \subseteq B \subseteq C$, e tali che $P(A)$ è un quarto della probabilità di B, la cui probabilità è $4/7$ di quella di C, determinare l'insieme $\mathcal{E}$ dei valori ammissibili (cioè coerenti) p di $P(B)$, e calcolare (in funzione di p) la previsione del numero aleatorio $X = |A| + 2|B| + |C|$.

$$\mathcal{E} = \{p : 0 \leq p \leq \frac{4}{7}\}\,; \qquad \mathbb{P}(X) = 4p$$

2. Dato un vettore aleatorio (X, Y) con distribuzione uniforme sul cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 2, calcolare le densità marginali, la $cov(X, Y)$, e determinare (sulla base della sola conoscenza di quest'ultima) le due rette di regressione.

$$f_X(z) = f_Y(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - z^2} & -2 \leq z \leq 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad , \; cov(X,Y) = 0$$

$$rette\ di\ regressione : x = 0\,, \qquad y = 0$$

3. Si considerino n numeri aleatori $X_1, X_2, ..., X_n$, indipendenti e con lo stesso scarto standard $\sigma = 2$. Per quali valori di n la loro media aritmetica ha scarto standard minore di $1/2$?

$$n > 16$$

4. Il tempo di attesa fino al primo guasto di una data apparecchiatura è un numero aleatorio X, con tasso di avaria $h(x) = \pi x^3$. Determinare la funzione di sopravvivenza $S(x) = P(X > x)$ di X.

$$S(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\pi}{4}x^4} & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

5. Da un'urna contenente 5 palline bianche e 2 nere si effettuano 4 estrazioni senza restituzione, ottenendo X palline bianche. Calcolare la funzione generatrice $\varphi(t)$ di $X - 2$.

$$\varphi(t) = \frac{1}{7}(2 + 4t + t^2)$$

6. Quattro veicoli arrivano a caso e indipendentemente in una data località durante l'intervallo di tempo $[0, 5]$. Se X e Y sono, rispettivamente, i tempi di attesa fino all'arrivo del primo e dell'ultimo veicolo, calcolare la previsione μ di $2Y - X$ e la densità $f(x)$ di X.

$$\mu = 7 \quad ; \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{4}{5}\left(1 - \frac{x}{5}\right)^3 & x \in [0, 5] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$