CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 21 gennaio 2002

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

Vecchio Ordinamento: 1–6, Elettronica 1^o mod, Nettuno: 1–4, Civile: 2–4.

1. - Siano A e B due eventi tali che $P(A) = 2/5$ e $P(A \vee B) = 3/5$. Determinare i valori di probabilità coerenti di B e stabilire se esiste e quale sia il valore p per $P(B)$ che renda A e B stocasticamente indipendenti.

$$P(B) \in \left[\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right] \qquad\qquad p = \frac{1}{3}$$

2. - Sia (X, Y) un vettore aleatorio con distribuzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & altrove \end{cases}$$

Calcolare le densità marginali di X e Y e determinare se X ed Y sono indipendenti.

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & altrove \end{cases} \qquad\qquad f_Y(y) = \begin{cases} -\ln y, & 0 < y < 1 \\ 0, & altrove \end{cases}$$

X ed Y sono stocasticamente indipendenti? si no

3. - Il campione casuale $x = (1.5, 3, 1, 2.5)$ proviene da una distribuzione normale di media incognita θ e varianza uguale a 4. Supposto che Θ abbia distribuzione iniziale normale con media 0 e varianza uguale a 1, determinare la distribuzione di $\Theta|x$.

$$\beta(\theta|x) = N_{1,1/\sqrt{2}}(\theta)$$

4. - La resistenza di un circuito elettrico è una variabile aleatoria R con distribuzione uniforme tra 11 e 12 Ohm. Sia $M = \frac{1}{R}$ la conduttanza del circuito. Calcolare la previsione di R ed M, la covarianza di R e M. Determinare la distribuzione di M.

$$\mathbb{P}(R) = 11.5 \qquad\qquad \mathbb{P}(M) = \ln\frac{12}{11} \qquad\qquad cov(R, M) = 1 - 11.5 \ln\frac{12}{11}$$

$$f_M(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \frac{1}{12} \le x \le \frac{1}{11} \\ 0, & altrove \end{cases}$$

5. - Il numero di disintegrazioni di una sostanza radioattiva al variare del tempo è un processo di Poisson $N(t)$ di intensità μ. Trovare la media e la varianza di $N(\tau)$, per un tempo τ assegnato. Determinare la distribuzione del tempo di attesa della prima disintegrazione T.

$$\mathbb{P}(N(\tau)) = \mu\tau \qquad\qquad var(N(\tau)) = \mu\tau \qquad\qquad f_T(t) = \mu e^{-\mu t}$$

6. - Si considerino due materiali U^{235} e Pu^{239} che, indipendentemente, decadono seguendo due diversi processi di Poisson $N_1(x)$ e $N_2(x)$ (con intensità μ_1 e μ_2, rispettivamente). Come è distribuito il numero totale di disintegrazioni $N_1(x) + N_2(x)$? (Suggerimento: usare le funzioni caratteristiche)

$$P(N_1(x) + N_2(x) = n) = \frac{(\mu_1 + \mu_2)^n}{n!} e^{-(\mu_1+\mu_2)}$$