PROBABILITA' - 3 luglio 2001

Scrivere le risposte negli appositi spazi, motivandole *dettagliatamente* su fogli allegati

Corso intero (Vecchio ordinamento): nn.1 – 6 **Tutti gli altri:** nn.1 – 4

1.- Data una successione di eventi E_n indipendenti ed equiprobabili, con probabilità $\frac{2}{3}$, calcolare la probabilità p di avere *al più* 1 successo su 5 prove.

$$p = \frac{11}{243}$$

2.- Un numero aleatorio continuo X ha densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}, & x \in (-1,1) \\ \frac{3}{8x^4}, & x \notin (-1,1) \end{cases}$$

Calcolare la probabilità dell'evento $\{X \in (-1,1)\}$. Per quale valore di c la probabilità che $X \in (-c,c)$ è uguale a 0.9? Calcolare (... senza calcoli!) il valor medio di X.

$$P(X \in (-1,1)) = \frac{3}{4}, \qquad c = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 1.357, \qquad \mathbb{P}(X) = 0$$

3.- Sia $f(x,y) = x - y$ in $D = [1,2] \times [0,1]$ (e uguale a 0 altrove) la densità di probabilità di un vettore aleatorio continuo (X,Y). Determinare le densità marginali f_X, f_Y, verificando se X, Y sono indipendenti.

$$f_X(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}, & x \in [1,2] \\ 0, & altrove \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2} - y, & y \in [0,1] \\ 0, & altrove \end{cases}$$

X, Y indipendenti? NO

4.- Un lotto contiene pezzi buoni B e difettosi D. La frazione θ di pezzi buoni ha distribuzione iniziale del tipo

$$\beta(\theta) = \begin{cases} k\theta(1-\theta) & 0 \le \theta \le 1 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Si estraggono 4 pezzi dal lotto ottenendo $x = (B,D,B,B)$. Determinare k e la distribuzione finale $\beta(\theta|x)$.

$$k = 6, \qquad \beta(\theta|x) = \mathbf{B}_{5,3}(\theta) = 105\theta^4(1-\theta)^2$$

5.- Le funzioni caratteristiche di due numeri aleatori X, Y indipendenti sono rispettivamente $\phi_X(t) = (\frac{e^{it}}{3} + \frac{2}{3})^4$, $\phi_Y(t) = (\frac{e^{it}}{3} + \frac{2}{3})^6$. Posto $Z = X + Y$, calcolare la previsione m_Z di Z e, fissato $h \in \{0,1,...,10\}$, la probabilità p_h dell'evento $(Z = h)$.

$$m_Z = \frac{10}{3}, \qquad p_h = \binom{10}{h} \left(\frac{1}{3}\right)^h \left(\frac{2}{3}\right)^{10-h}$$

6.- Una scatola contiene due palline, una bianca ed una nera. Si fanno tre estrazioni e, ad ogni estrazione, dopo aver guardato il colore della pallina estratta, questa si rimette a posto aggiungendone una di colore opposto. Considerati gli eventi

E_n= "pallina bianca alla n-esima estrazione"

$n = 1,2,3$, calcolare la probabilità di $(E_1 \wedge E_2)$ e di $(E_1 \wedge E_3)$. Gli eventi E_n sono scambiabili?

$$P(E_1 \wedge E_2) = \frac{1}{6}, \qquad P(E_1 \wedge E_3) = \frac{5}{24}$$

E_n scambiabili? NO