CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 9 giugno 1998

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Dati gli eventi A, B, C , ognuno dei quali implica il successivo, e tali che $P(A)$ è metà della probabilità di B , che a sua volta ha probabilità metà di quella di C , determinare l'insieme E dei valori coerenti p di $P(A)$ e calcolare (in funzione di p) la previsione del numero aleatorio $X = |A| + |B| + |C|$.

$$E = \{p : 0 \leq p \leq 1/4\} \quad \mathbf{P}(X) = 7p$$

2. Dato un vettore aleatorio (X, Y) con distribuzione uniforme sul cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 3, calcolare le densità marginali e la retta di regressione di Y su X .

$$f_X(z) = f_Y(z) = \begin{cases} \frac{2}{9\pi} \sqrt{9 - z^2}, & z \in (-3, 3) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad y = 0$$

3. Da un'urna contenente 3 palline bianche e 2 nere si effettuano 3 estrazioni senza restituzione, ottenendo X palline bianche. Calcolare la funzione generatrice $\varphi(t)$ di $X - 1$.

$$\varphi(t) = \frac{3 + 6t + t^2}{10}$$

4. Si considerino n numeri aleatori $X_1, X_2, \dots, X_n$, indipendenti e con lo stesso scarto standard $\sigma = 4$. Per quali valori di n la loro media aritmetica ha varianza minore di 1?

$$n > 16$$

5. Il tempo di attesa fino al primo guasto di una data apparecchiatura è un numero aleatorio X , con tasso di avaria $h(x) = 3x^2$. Determinare la funzione di ripartizione $F(x)$ di X .

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x^3}, & x > 0 \end{cases}$$

6. Tre persone arrivano a caso e indipendentemente in una data località durante l'intervallo di tempo $[0, 4]$. Se X e Y sono, rispettivamente, i tempi di attesa fino all'arrivo della prima e dell'ultima persona, calcolare la previsione μ di $Y - X$ e la densità $f(y)$ di Y .

$$\mu = 2 \quad f(y) = \begin{cases} \frac{3}{64} y^2, & y \in [0, 4] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 16 giugno 1998

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Un canale di trasmissione binaria invia dei segnali che sono trasmessi, ad ogni prova, con probabilità costante p . Indicando con E_i i corrispondenti eventi, e supponendo che essi siano indipendenti, sia X il numero di prove effettuate fino alla trasmissione del primo segnale. Rappresentare X in funzione degli E_i e dei loro contrari, calcolare la previsione di X e la probabilità dell'evento $\{X > 2\}$.

$$X = |E_1| + \sum_{n=2}^{\infty} n |E_1^c \cap \dots \cap E_{n-1}^c \cap E_n|; \quad \mathbf{P}(X) = \frac{1}{p} \quad P(X > 2) = (1 - p)^2$$

2. Dato un vettore aleatorio (X, Y) , con densità $f(x, y) = k(x - y)$ nel triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, e $f(x, y) = 0$ altrove, si considerino gli eventi $A = \{Y \leq X\}$, $B = \{X \leq 1/2\}$. Determinare k , calcolare le probabilità degli eventi A e B e stabilire se essi sono scambiabili (contrassegnare così la risposta giusta).

$$k = 6 \quad P(A) = 1 \quad P(B) = \frac{1}{8}$$

scambiabili non scambiabili

3. I numeri aleatori X_i siano estratti da una popolazione normale, con valor medio θ incognito e varianza nota $\sigma^2 = 1/5$. La distribuzione iniziale di θ si assume normale, con $m_0 = 0$ e $\sigma_0^2 = 1/5$. Calcolare la distribuzione finale di θ , avendo osservato un campione $x = (x_1, x_2, x_3)$ tale che $x_1 + x_2 + x_3 = 4$.

$$\beta(\theta|x) = N_{m_3, \sigma_3}(\theta), \quad m_3 = 1, \quad \sigma_3 = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

4. Un'industria esegue un test di controllo di qualità in questo modo: si esamina un lotto di materiale, che viene classificato come *buono* (B), *incerto* (I), *difettoso* (D). Se si osserva B oppure D , il test è finito, accettando il materiale o scartandolo. Se invece si osserva I , si rimette a posto il lotto esaminato, e si esamina un nuovo lotto, procedendo allo stesso modo fino a quando si ottiene B o D . In ogni prova, le probabilità di B, I, D sono rispettivamente α, β, γ (con $\alpha + \beta + \gamma = 1$). Calcolare la probabilità p che il test si concluda con lo scarto del materiale.

$$p = \frac{\gamma}{1 - \beta}$$

5. Un processo di Poisson ha intensità 3, ed il numero di arrivi osservati in $[0, 2]$ è uguale a 4. Calcolare la probabilità (condizionata) p che tutti gli arrivi si siano verificati nell'intervallo $[0, 1]$ e la densità di probabilità $g(t)$ del tempo di attesa tra il primo e il secondo arrivo.

$$p = \frac{1}{16} \quad g(t) = \begin{cases} 3e^{-3t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

6. Considerato un processo di Poisson di intensità 3, calcolare la funzione generatrice $\varphi(t)$ del numero (aleatorio) X di arrivi in $[0, 1]$.

$$\varphi(t) = e^{3(t-1)}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 30 giugno 1998

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Da un lotto contenente 100 pezzi, fra i quali 5 sono difettosi, si estrae un pezzo alla volta, rimettendolo a posto se non è difettoso e interrompendo l'esperimento appena si trova il primo pezzo difettoso. Calcolare il numero medio μ di estrazioni necessarie per trovare il primo pezzo difettoso.

$$\mu = 20$$

2. Siano X e Y due numeri aleatori indipendenti, con distribuzione normale standard. Trovare funzione di ripartizione $F(z)$ e densità $f(z)$ del numero aleatorio $Z = \frac{X}{Y}$. (Suggerimento: si possono distinguere i due casi $z \geq 0$ e $z < 0$; poi, nel calcolo della probabilità che esprime $F(z)$, disintegrare rispetto ai due casi $Y > 0$ e $Y < 0$)

$$F(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} z \quad f(z) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+z^2}$$

3. Sia (X, Y) un vettore aleatorio discreto, con probabilità concentrate, *uguali*, sui vertici del quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$. Calcolare le probabilità degli eventi $A = \{X = 1\}$ e $B = \{Y = 0\}$, e $\operatorname{cov}(X, Y)$, $\operatorname{var}(X - 3Y)$.

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad \operatorname{cov}(X, Y) = 0 \quad \operatorname{var}(X - 3Y) = \frac{5}{2}$$

4. Sia X_i il numero di clienti che si mettono in fila ad uno sportello tra le 8 e le 9 di mattina del giorno i -esimo: si suppone che X_i abbia distribuzione di Poisson di parametro incognito θ , che a sua volta ha densità iniziale del tipo $\beta(\theta) = c\theta e^{-2\theta}$, con c opportuno. Si osserva il numero di arrivi per 12 giorni, ottenendo il campione casuale $x = (6, 3, 7, 4, 5, 8, 6, 5, 2, 7, 7, 5)$. Calcolare c e la distribuzione finale di θ .

$$c = 4 \quad \beta(\theta|x) = \frac{14^{67}}{66!} \theta^{66} e^{-14\theta}$$

5. Dato un numero aleatorio X con distribuzione uniforme sull'intervallo $[0, 2\pi]$, calcolare la sua funzione caratteristica.

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{2\pi it} - 1}{2\pi it}$$

6. X_1, X_2, X_3 sono numeri aleatori indipendenti con distribuzione uniforme su $[0, 2]$. Indicate con X e Y , rispettivamente, la prima e la terza statistica d'ordine, il vettore aleatorio (X, Y) ha (com'è noto) densità congiunta $\varphi(x, y) = \frac{3}{4}(y - x)$ (per $x < y$, e 0 altrove). Calcolare $\operatorname{cov}(X, Y)$ e la previsione della somma S delle lacune.

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \frac{1}{20} \quad \mathbf{P}(S) = 2$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 16 luglio 1998

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Due lotti di componenti elettronici sono composti, rispettivamente, il primo da 30 pezzi buoni e 5 difettosi, il secondo da 50 pezzi buoni e 4 difettosi. Un componente del primo lotto viene inserito, senza essere esaminato, nel secondo lotto, dal quale si estrae poi un pezzo che viene esaminato. Considerati gli eventi

A =il componente inserito nel secondo lotto è buono,

B =il componente estratto dal secondo lotto è buono,

calcolare $P(B|A^c)$ e $P(B)$.

$$P(B|A^c) = \frac{10}{11} \quad P(B) = \frac{356}{385}$$

2. Il numero aleatorio X di autovetture che arrivano ad un distributore fra le 11 e le 12 di mattina ha distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 10$. Calcolare la previsione di X e la probabilità dell'evento A =arrivano meno di 3 autovetture.

$$\mathbf{P}(X) = 10 \quad P(A) = 61e^{-10}$$

3. Dato un numero aleatorio X con distribuzione esponenziale di parametro λ (numero reale positivo), calcolare il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$, con $Y = e^\lambda - 2X$ e la funzione di ripartizione $F_Y(y)$ di Y .

$$\rho(X, Y) = -1 \quad F_Y(y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}\lambda(e^\lambda - y)} & y < e^\lambda \\ 1 & y \geq e^\lambda \end{cases}$$

4. Per una data apparecchiatura, sia

X = tempo di attesa fino al primo guasto.

Se il tasso di avaria di X è $h(x) = x\sqrt{x}$, determinare la densità di probabilità $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Tale densità è di *Weibull*, con

$$\lambda = \frac{2}{5} \quad \beta = \frac{3}{2}$$

5. Sia T il tempo di attesa del primo arrivo in un processo di Poisson di intensità aleatoria A , con densità $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x > 0$). Calcolare la funzione di sopravvivenza di T e la trasformata di Laplace di $f(x)$.

$$S(t) = \frac{\lambda}{\lambda + t} (t \geq 0) \quad \hat{f}(t) = S(t)$$

6. Contrassegnare le affermazioni seguenti con V o F , a seconda che siano vere o false:

le statistiche d'ordine di un processo uniforme sono scambiabili

F

le lacune di un processo uniforme hanno distribuzione gamma

F

le lacune di un processo uniforme possono avere distribuzione beta

V

le statistiche d'ordine di un processo uniforme hanno la stessa distribuzione

F

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 16 settembre 1998

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Sia X un numero aleatorio con distribuzione normale standard. Dato $Y = 1 - 3X$, calcolare la funzione di ripartizione $G(y)$ di Y e la probabilità condizionata $p = P(Y < 1 | Y < 4)$.

$$G(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{1-y}{3}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \Phi\left(\frac{y-1}{3}\right) \quad p = \frac{1}{2\Phi(1)}$$

2. Il codominio di un vettore aleatorio discreto (X, Y) è costituito dalle coppie **equiprobabili** $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$. Determinare la funzione di ripartizione $F(z)$ del numero aleatorio $Z = X + Y$.

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ \frac{1}{5}, & 0 \leq z < 2 \\ \frac{2}{5}, & 2 \leq z < 3 \\ \frac{4}{5}, & 3 \leq z < 4 \\ 1, & z \geq 4 \end{cases}$$

3. Un lotto contiene 55 pezzi funzionanti e 3 pezzi difettosi. Si estraggono in blocco 4 pezzi: calcolare la probabilità p che tra i pezzi estratti ve ne sia 1 difettoso, e l'approssimazione binomiale p_o di p .

$$p = \frac{1431}{7714} \quad p_o = 0.1764$$

4. Si consideri un processo uniforme su $[0, 1]$ con quattro lacune. Posto $Y = L_1 + L_3 + L_4$, calcolare il coefficiente di correlazione $\rho(Y, L_2)$ e la probabilità che L_2 sia maggiore di $\frac{1}{3}$.

$$\rho(Y, L_2) = -1 \quad P(L_2 > \frac{1}{3}) = \frac{8}{27}$$

5. Dato un vettore aleatorio (X, Y) , la retta di regressione di X su Y è $4x = y + 4$, e quella di Y su X è $y = x + 1$. Calcolare il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$.

$$\rho(X, Y) = \frac{1}{2}$$

6. Contrassegnare le affermazioni seguenti con V o F (vera o falsa):

n. aleatori con distr. binomiale sono lacune di un processo di Bernoulli

F

n. aleatori **dipendenti** non possono essere lacune di un proc. uniforme

F

un processo di "arrivi", nel quale il loro numero in $(0, t)$ non abbia distribuzione esponenziale, non può essere un processo di Poisson

F

n. aleatori non aventi la stessa distribuzione non possono essere le statistiche d'ordine di un processo uniforme

F

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 22 ottobre 1998

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Siano A, B eventi, con $P(A|B) = 0.2$. La valutazione $P(A \cap B) = 0.3$ è coerente? (Cerchiare la risposta corretta). Dare una valutazione coerente di $P(A)$ affinché gli eventi A, B siano stocasticamente indipendenti. In questo caso, assegnato il valore $P(B) = 0.5$, determinare la corrispondente assegnazione coerente di $P(A \cap B)$.

$P(A \cap B) = 0.3$ coerente?	SÌ	☒ NO
-------------------------------	----	-------------------------------------

$P(A) = 0.2$	$P(A \cap B) = 0.1$
--------------	---------------------

2. Date due urne U, V contenenti entrambe N palline, siano α, β le rispettive proporzioni di palline bianche. Si sceglie “a caso” una delle due urne e da essa si estraggono due palline senza restituzione. Calcolare la probabilità dell’evento E =le due palline sono entrambe bianche.

$$P(E) = \frac{1}{2} \frac{(\alpha^2 + \beta^2)N - (\alpha + \beta)}{N - 1}$$

3. Due lotti contengono, entrambi, 21 pezzi funzionanti e 3 pezzi difettosi. Si estrae “a caso” un pezzo dal primo lotto e si mette nel secondo: calcolare $\text{cov}(X, Y)$, essendo

X =numero di pezzi difettosi nel primo lotto
 Y =numero di pezzi difettosi nel secondo lotto.

$$\text{cov}(X, Y) = -\frac{7}{64}$$

4. La probabilità che una certa moneta sia truccata con due T (sia H questo evento) viene valutata uguale a β . Dopo cinque lanci in cui si ottiene sempre T , viene attribuita la stessa probabilità all’evento H ed al suo contrario H^c . Dedurne il valore della valutazione iniziale β .

$$\beta = \frac{1}{33}$$

5. Dati quattro numeri aleatori indipendenti e con distribuzione uniforme in $[0, 2]$, calcolare la densità di probabilità della seconda statistica d’ordine $X_{(2)}$, la probabilità dell’evento $\{X_{(2)} < 1\}$, e la densità di probabilità $h(z)$ di $Z = X_{(3)} - X_{(2)}$.

$$f_{(2)}(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x(2-x)^2 & x \in (0, 2) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad P(X_{(2)} < 1) = \frac{11}{16} \quad h(z) = \begin{cases} 2 \left(1 - \frac{z}{2}\right)^3 & z \in (0, 2) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

6. Contrassegnare le affermazioni seguenti con V o F (vera o falsa):

eventi scambiabili sono indipendenti ed equiprobabili.

F

la conoscenza delle distribuzioni marginali consente la determinazione della distribuzione congiunta.

F

le lacune di un processo uniforme non hanno la stessa distribuzione.

F

eventi indipendenti ed equiprobabili sono scambiabili.

V

numeri aleatori non correlati sono indipendenti.

F