CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 13 gennaio 1999
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Siano A, B, C eventi, con $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$, $P(C) = 0.7$, e per i quali è noto che i relativi costituenti sono $C_1 = A^c B^c C^c$, $C_2 = AB^c C^c$, $C_3 = ABC^c$, $C_4 = A^c BC^c$, $C_5 = A^c B^c C$. Verificare se le precedenti valutazioni sono coerenti e calcolare la probabilità di C_5.

$$\boxed{coerenti? \qquad NO}$$

2. Sia X un numero aleatorio con funzione di ripartizione

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 1/2, & -1 \leq x < 1 \\ 2/3, & 1 \leq x < 5/2 \\ 5/6, & 5/2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

Determinare il suo codominio $\mathcal{C}_X$, la probabilità degli eventi $\{X = 2\}$, $\{X = 3\}$, la funzione caratteristica $\varphi_X(t)$.

$$\boxed{\mathcal{C}_X = \{-1, 1, \frac{5}{2}, 3\} \qquad P(X = 2) = 0 \qquad P(X = 3) = \frac{1}{6}}$$

$$\boxed{\varphi_X(t) = \frac{1}{2} e^{-it} + \frac{1}{6} \left(e^{it} + e^{\frac{5}{2}it} + e^{3it} \right)}$$

3. In un controllo di qualità, si estrae un campione di $n = 8$ pezzi da un lotto che ne contiene $N = 40$ fra i quali x difettosi. Il lotto viene accettato (sia E questo evento) se nel campione c'è al più un pezzo difettoso: calcolare (con tre decimali) la probabilità di E nell'ipotesi $x = 5$.

$$\boxed{P(E) = 0.743}$$

4. Un vettore aleatorio (X, Y) ha distribuzione uniforme su $\mathcal{C} = [0, 1] \times [0, 2]$. Calcolare le densità marginali f_X, f_Y e la probabilità dell'evento condizionato $E|H$, con $E = (Y - X > 0)$, $H = (X > 1/2)$.

$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & y \in [0, 2] \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} \qquad P(E|H) = \frac{5}{8}}$$

5. Sia $X = (X_1, X_2, X_3)$ un campione casuale estratto da una popolazione normale $N_{\theta,2}(x)$. Se la distribuzione iniziale di Θ è $\beta(\theta) = N_{0,3}(\theta)$, calcolare la sua distribuzione finale, supposto di aver osservato un campione $x = (x_1, x_2, x_3)$ tale che $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Calcolare inoltre il valore θ_0 tale che $P(\Theta > \theta_0 | x) = 0.1587$.

$$\boxed{\beta(\theta|x) = N_{0,1.08} \qquad \theta_0 = 1.08}$$

6. In un processo di Poisson di intensità 1, calcolare la probabilità p di 3 arrivi in $(0, 1)$ e la previsione μ del numero di arrivi in $(0, 1)$. Si considerino poi gli eventi

E=il numero di arrivi in $(0, 1)$ è uguale a 4 ,

A=tutti gli arrivi si verificano dopo l'istante $t_0 \in (0, 1)$,

calcolando la probabilità di A condizionata ad E.

$$\boxed{p = \frac{1}{6} e^{-1} \qquad \mu = 1 \qquad P(A|E) = (1 - t_0)^4}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 27 gennaio 1999
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. In un controllo di qualità, si estrae un campione di $n = 6$ pezzi da un lotto che ne contiene $N = 20$ fra i quali x difettosi. Il lotto viene accettato (sia E questo evento) se nel campione c'è al più un pezzo difettoso: calcolare (con tre decimali) la probabilità di E nell'ipotesi $x = 3$.

$$\boxed{P(E) = 0.798}$$

2. Siano A, B, C eventi, con $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$, $P(C) = 0.5$, e per i quali è noto che i relativi costituenti sono $C_1 = A^cB^cC^c$, $C_2 = AB^cC^c$, $C_3 = A^cBC^c$, $C_4 = A^cB^cC$. Verificare se le precedenti valutazioni sono coerenti e calcolare la probabilità di C_3.

$$\boxed{coerenti? \qquad NO}$$

3. Sia X un numero aleatorio con funzione di ripartizione

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1/2 \\ 1/4, & 1/2 \le x < 1 \\ 3/4, & 1 \le x < 2 \\ 7/8, & 2 \le x < 4 \\ 1, & x \ge 4 \end{cases}$$

Determinare il suo codominio $\mathcal{C}_X$, la probabilità degli eventi $\{X = 2\}$, $\{X \le 3\}$, la funzione generatrice (delle probabilità) $\varphi(t)$.

$$\boxed{\mathcal{C}_X = \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, 4\right\} \qquad P(X = 2) = \frac{1}{8} \qquad P(X \le 3) = \frac{7}{8}}$$

$$\boxed{\varphi(t) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}(t^4 + t^8)}$$

4. Un vettore aleatorio (X, Y) ha distribuzione uniforme su $\mathcal{C} = [0, 3] \times [0, 1]$. Calcolare le funzioni di ripartizione F_X, F_Y e la probabilità dell'evento condizionato $E|H$, con $E = (Y - X < 0)$, $H = (X < 2)$.

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{3}x, & x \in (0, 3] \\ 1, & x > 3 \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ y, & y \in (0, 1] \\ 1, & y > 1 \end{cases} \qquad P(E|H) = \frac{3}{4}}$$

5. In un processo di Poisson di intensità 2, calcolare la probabilità p di 4 arrivi in $(0, 1)$ e la previsione μ del numero di arrivi in $(0, 1)$. Si considerino poi gli eventi

E=il numero di arrivi in $(0, 1)$ è uguale a 5 ,

A=tutti gli arrivi si verificano dopo l'istante $t_0 \in (0, 1)$,

calcolando la probabilità di A condizionata ad E.

$$\boxed{p = \frac{2}{3}e^{-2} \qquad \mu = 2 \qquad P(A|E) = (1 - t_0)^5}$$

6. Sia $X = (X_1, X_2)$ un campione casuale estratto da una popolazione normale $N_{\theta,1}(x)$. Se la distribuzione iniziale di Θ è $\beta(\theta) = N_{0,3/2}(\theta)$, calcolare la sua distribuzione finale, supposto di aver osservato un campione $x = (x_1, x_2)$ tale che $x_1 + x_2 = 1$. Calcolare inoltre il valore θ_0 tale che $P(\Theta > \theta_0|x) = 0.242$.

$$\boxed{\beta(\theta|x) = N_{0.41,0.64}(\theta) \qquad \theta_0 = 0.858}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ- 10 febbraio 1999
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Sia X un numero aleatorio con funzione di ripartizione

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 1/5, & -2 \le x < 0 \\ 9/20, & 0 \le x < 1 \\ 7/10, & 1 \le x < 2 \\ 13/15, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

Determinare il suo codominio $\mathcal{C}_X$, la probabilità degli eventi $\{X \le -1\}$, $\{X = 5/2\}$, $\{X \ge 7/2\}$, la funzione caratteristica $\varphi_X(t)$.

$$\boxed{\mathcal{C}_X = \{-2, 0, 1, 2, 3\} \qquad P(X \le -1) = \frac{1}{5} \qquad P(X = 5/2) = 0 \qquad P(X \ge 7/2) = 0}$$

$$\boxed{\varphi_X(t) = \frac{1}{5}e^{-2it} + \frac{1}{4}(1 + e^{it}) + \frac{1}{6}e^{2it} + \frac{2}{15}e^{3it}}$$

2. Siano A, B, C eventi, con $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$, $P(C) = 0.6$, e per i quali è noto che i relativi costituenti sono $C_1 = A^cB^cC^c$, $C_2 = ABC^c$, $C_3 = AB^cC^c$, $C_4 = AB^cC$, $C_5 = A^cB^cC$. Verificare se le precedenti valutazioni sono coerenti e calcolare la probabilità di C_2.

$$\boxed{coerenti? \quad \text{SÌ} \qquad P(C_2) = 0.3}$$

3. In un controllo di qualità, si estrae un campione di $n = 10$ pezzi da un lotto che ne contiene $N = 60$ fra i quali x difettosi. Il lotto viene accettato (sia E questo evento) se nel campione c'è al più un pezzo difettoso: calcolare (con tre decimali) la probabilità di E nell'ipotesi $x = 8$ e verificare se è uguale a 0.600.

$$\boxed{P(E) = 0.600? \quad \text{SÌ}}$$

4. Sia $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ un campione casuale estratto da una popolazione normale $N_{\theta,1.2}(x)$. Se la distribuzione iniziale di Θ è $\beta(\theta) = N_{0,1.6}(\theta)$, calcolare la sua distribuzione finale, supposto di aver osservato un campione $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ tale che $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$. Calcolare inoltre il valore θ_0 tale che $P(\Theta > \theta_0 | x) = 0.3974$.

$$\boxed{\beta(\theta|x) = N_{-0.22,0.56}(\theta) \qquad \theta_0 = -0.07}$$

5. Un vettore aleatorio (X, Y) ha distribuzione uniforme su $\mathcal{C} = [0, 2] \times [0, 2]$. Calcolare le funzioni caratteristiche φ_X, φ_Y e la probabilità dell'evento condizionato $E|H$, con $E = (Y - 2X > 0)$, $H = (X < 1/3)$.

$$\boxed{\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) = \frac{e^{2it} - 1}{2it} \qquad P(E|H) = \frac{5}{6}}$$

6. In un processo di Poisson di intensità $1/2$, calcolare la probabilità p di 2 arrivi in $(0, 1)$ e la previsione μ del numero di arrivi in $(0, 1)$. Si considerino poi gli eventi

E=il numero di arrivi in $(0, 1)$ è uguale a 2 ,

A=tutti gli arrivi si verificano dopo l'istante $t_0 \in (0, 1)$,

calcolando la probabilità di A condizionata ad E.

$$\boxed{p = \frac{1}{8\sqrt{e}} \qquad \mu = \frac{1}{2} \qquad P(A|E) = (1 - t_0)^2}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 23 aprile 1999
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Dati tre eventi A, B, E, con $A \subset B$, $A \wedge E = \emptyset$, $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.7$, $P(E) = 0.4$, $P(B^c \wedge E) = 0.3$, determinare i costituenti C_i relativi a tali eventi e le loro probabilità α_i.

$$\boxed{C_1 = A^c \wedge B \wedge E, \quad C_2 = A \wedge B \wedge E^c, \quad C_3 = A^c \wedge B^c \wedge E, \quad C_4 = A^c \wedge B \wedge E^c, \quad C_5 = A^c \wedge B^c \wedge E^c}$$

$$\boxed{\alpha_1 = 0.1, \quad \alpha_2 = 0.2, \quad \alpha_3 = 0.3, \quad \alpha_4 = 0.4, \quad \alpha_5 = 0}$$

2. Un lotto con 5 pezzi contiene al più un pezzo difettoso, e la probabilità dell'evento

$$H = \text{nessun pezzo è difettoso}$$

viene valutata uguale ad un numero α. Si effettuano 3 estrazioni senza restituzione, ottenendo sempre un pezzo non difettoso: sulla base di questo risultato la probabilità dell'evento H viene aggiornata, assegnandogli un valore doppio di quello di H^c. Dedurne il valore della valutazione iniziale α.

$$\boxed{\alpha = \frac{4}{9}}$$

3. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità congiunta $f(x, y) = xy$ in $[0, \frac{1}{2}] \times [0, 4]$ (e zero altrove). Calcolare le probabilità

$$\boxed{P(0 < X < \frac{1}{2}) = 1 \qquad P(0 < Y < 2) = \frac{1}{4} \qquad P(X = Y) = 0}$$

e stabilire se X e Y sono scambiabili. $\boxed{\text{SÌ} \qquad \text{NO}}$

4. Siano X, Y due numeri aleatori con distribuzione normale standard, e sia

$$Y = -2\pi X + 3.$$

Calcolare il coefficiente di correlazione di X e Y.

$$\boxed{\rho(X, Y) = \mathbb{P}(XY), \text{ oppure } -1}$$

Commentare le due ipotesi precedenti. $\boxed{\text{(SONO INCOMPATIBILI!)}}$

5. Dato un processo di Poisson di intensità $\alpha = \frac{1}{2}$, calcolare

$$\boxed{\mathbb{P}(X + Y) = \frac{3}{2} \qquad P(X = 0, Y = 0) = e^{-\frac{3}{2}} \qquad P(X = 0 | X + Y = 1) = \frac{2}{3}}$$

essendo X il numero di arrivi in $[0, 1]$ e Y il numero di arrivi in $(1, 3]$.

6. Sia $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \exp(-2\sqrt{x})$ la densità di probabilità di un numero aleatorio $X \geq 0$. Verificare che X ha intensità decrescente.

$$\boxed{h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} (x > 0)}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 7 giugno 1999
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Dati quattro eventi A, B, D, E, con $D = (A \wedge B^c) \vee (A^c \wedge B)$ ed E tale che $(A \vee B) \wedge E = \emptyset$, ed i valori

$$P(A) = 0.1\,, \quad P(B) = 0.5\,, \quad P(D) = 0.3\,, \quad P(E) = 0.02\,,$$

stabilire se tali assegnazioni di probabilità sono coerenti.

COERENTI?	SÌ	NO

2. Stabilire quali coppie di eventi, fra quelli considerati in **1.**, sono costituite da eventi logicamente indipendenti, e quali coppie da eventi stocasticamente indipendenti.

COPPIE LOGICAMENTE INDIPENDENTI (A,B), (A,D), (B,D)

COPPIE STOCASTICAMENTE INDIPENDENTI non esiste una P

3. Ogni pezzo prodotto da un macchinario ha probabilità $p = \dfrac{1}{500}$ di essere difettoso. Usando l'approssimazione di Poisson, calcolare la probabilità α che su $n = 1000$ pezzi prodotti ve ne siano 4 o più difettosi.

$$\boxed{\alpha = 1 - \frac{19}{3e^2}}$$

4. Dati $a > 0$, $b > 0$, sia X un numero aleatorio con densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & x \in (a,b) \\ 0 & x \notin (a,b) \end{cases}$$

Determinare a, b sapendo che $\mathbb{P}(X) = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}$.

$$\boxed{a = \frac{e-1}{e} \qquad\qquad b = e - 1}$$

5. Contrassegnare le affermazioni seguenti con V o F, a seconda che siano vere o false.
In un processo di Poisson

i tempi di attesa fra due arrivi hanno la stessa previsione	V
il numero di arrivi in (o,t) ha distribuzione di Poisson	V
i tempi di attesa fra due arrivi non sono indipendenti	F
i tempi di attesa fra due arrivi non hanno la stessa distribuzione	F

6. Siano X_1, X_2 due punti scelti a caso in $[0,3]$. Fissato $x \in [0,2]$, calcolare la probabilità p che almeno un punto appartenga all'intervallo $[0,x]$, e calcolare la previsione μ di $Y = 7(X_{(1)} - X_{(2)})$.

$$\boxed{p = \frac{x}{3}\left(2 - \frac{x}{3}\right) \qquad\qquad \mathbb{P}(Y) = -7}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 17 giugno 1999
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Dati quattro eventi A, B, D, E, con $A \wedge B \neq \emptyset$, $D = (A \wedge B^c) \vee (A^c \wedge B)$ ed E tale che $A \wedge E \neq \emptyset$ e $B \wedge E = \emptyset$, ed i valori

$$P(A) = 0.2\,, \quad P(B) = 0.5\,, \quad P(D) = 0.3\,, \quad P(E) = 0.2\,,$$

stabilire se tali assegnazioni di probabilità sono coerenti.

COERENTI?	SÌ	NO

2. Stabilire quali coppie di eventi, fra quelli considerati in **1.**, sono costituite da eventi logicamente indipendenti, e quali coppie da eventi stocasticamente indipendenti.

COPPIE LOGICAMENTE INDIPENDENTI (A,B), (A,D), (B,D), (D,E), (A,E)

COPPIE STOCASTICAMENTE INDIPENDENTI nessuna

3. Un lotto contiene 200 pezzi, fra i quali 10 sono difettosi. Si effettuano $n = 5$ estrazioni senza restituzione, e si considera il numero aleatorio X = *numero di pezzi difettosi*. Usando l'approssimazione binomiale, calcolare la probabilità α che sia $X \leq 2$.

$$\boxed{\alpha = 0.9988}$$

4. La distribuzione di probabilità di un numero aleatorio continuo X soddisfa la relazione

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$$

per ogni $s > 0$, $t > 0$, ed è noto che $\mathbb{P}(X) = 3$. Calcolare la previsione di $Y = (X + 3)^2$.

$$\boxed{\mathbb{P}(Y) = 45}$$

5. Contrassegnare le affermazioni seguenti con V o F, a seconda che siano vere o false.
In un processo di Poisson

i tempi di attesa fra due arrivi hanno distribuzione normale	F
i tempi di attesa fra due arrivi non hanno la stessa varianza	F
i tempi di attesa fra due arrivi non hanno distribuzione uniforme	V
il numero di arrivi in (0,t) ha distribuzione binomiale	F

6. Dato un processo uniforme sull'intervallo $[0, 5]$, con $n = 2$, calcolare la probabilità p che nessun punto appartenga all'intervallo $[0, x]$, con $x \in [0, 3]$. Calcolare la previsione μ del numero aleatorio $Y = max\{X_1, X_2\}$.

$$p = \left(1 - \frac{x}{5}\right)^2 \qquad \mathbb{P}(Y) = \frac{10}{3}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 28 giugno 1999
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Diploma: solo primi 3 esercizi

1. Una scatola contiene 7 monete: di esse 3 sono normali, 2 hanno due teste (T) e 2 hanno due croci (C). Si estrae a caso una moneta dalla scatola e si lancia senza guardarla, ottenendo T. Calcolare la probabilità p che anche sull'altra faccia ci sia T.

$$\boxed{p = \frac{4}{7}}$$

2. Per un vettore aleatorio discreto (X, Y) si ha

$$P(X = x, Y = y) > 0$$

solo nei punti $(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$, ed i corrispondenti eventi sono equiprobabili. Calcolare $P(X \geq 1|X \neq Y)$, cov(X, Y), var$(X - Y)$.

$$\boxed{P(X \geq 1|X \neq Y) = 1 \qquad \text{cov}(X, Y) = \frac{9}{25} \qquad \text{var}(X - Y) = \frac{2}{5}}$$

3. Sia $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ un campione casuale estratto da una popolazione $N_{\theta,3}(x_i)$. Determinare i valori di n tali che la varianza della media aritmetica $\overline{x}$ sia minore di 2. Supposto poi che θ abbia distribuzione iniziale $N_{2,1}(\theta)$, e che il campione osservato x (relativo al minimo valore di n determinato precedentemente) verifichi la relazione $x_1 + x_2 + ... + x_n = 9$, calcolare la distribuzione finale di θ.

$$\boxed{n = 5, 6, ... \qquad \beta(\theta|x) = N_{\frac{27}{14}, \frac{3}{\sqrt{14}}}(\theta)}$$

4. In un processo uniforme sull'intervallo $(0, 4)$, con $n = 3$, calcolare la previsione di $X_{(3)} - X_{(1)}$ e la funzione di ripartizione di $X_{(3)}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{(3)} - X_{(1)}) = 2 \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \left(\frac{x}{4}\right)^3 & 0 < x \leq 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}}$$

5. Calcolare la funzione generatrice del numero aleatorio $Y = 3X + 1$, essendo X un numero aleatorio con distribuzione di Poisson di parametro 2, e la previsione di Y.

$$\boxed{f_Y(t) = te^{2(t^3-1)} \qquad \mathbb{P}(Y) = 7}$$

6. Un processo di Poisson ha intensità α aleatoria, con densità

$$f(\alpha) = \begin{cases} e^{-\alpha+\pi} & \alpha \geq \pi \\ 0 & \alpha < \pi \end{cases}$$

Calcolare la densità di probabilità $g(t)$ del tempo di attesa fra due arrivi.

$$\boxed{g(t) = \frac{e^{-\pi t}}{t+1}\left(\pi + \frac{1}{t+1}\right) \qquad (t \geq 0)}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 15 luglio 1999
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Diploma: solo primi 3 esercizi

1. Una scatola contiene 5 palline numerate da 1 a 5: si estrae a caso una pallina, e sia E_k = la pallina estratta ha il numero k $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$. Posto $A = E_1 \vee E_2$, $B = E_2 \vee E_3$, $C = E_4 \vee E_5$, questi tre eventi sono stocasticamente indipendenti? Sono a due a due indipendenti? Elencare, fra le coppie (A, B),(B, C),(A, C), quelle costituite da eventi logicamente indipendenti.

INDIPENDENTI? | SÌ NO | A DUE A DUE INDIPENDENTI? | SÌ NO |

COPPIE LOGICAMENTE INDIPENDENTI: (A, B)

2. Dati tre eventi A, B, C, con $A \subset B$, $B \wedge C = \emptyset$, sia $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$, $P(C) = 0.3$. Stabilire se tali assegnazioni sono coerenti e calcolare la probabilità dell'unione dei tre eventi.

COERENTI? SÌ NO $P(A \vee B \vee C) = 0.7$

3. Determinare le densità marginali del vettore aleatorio (X, Y) avente densità congiunta.

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y\,, & (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Stabilire poi se X e Y sono indipendenti, e calcolare la probabilità condizionata $P(A|B)$, con $A = \{X + Y > 1\}$, $B = \{Y < X\}$.

$$f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} \quad ; \quad f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2}, & y \in [0, 1] \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

X, Y INDIPENDENTI? SÌ NO $P(A|B) = \frac{2}{3}$

4. Sia $f(x) = (1 + \pi)x^{\pi}e^{-x^{1+\pi}}$ la densità di probabilità di un numero aleatorio $X \geq 0$. Stabilire se l'intensità $h(x)$ è crescente, decrescente, costante.

$h(x) = (1 + \pi)x^{\pi}$ CRESCENTE X DECRESCENTE COSTANTE

5. Dato un processo uniforme sull'intervallo $(0, 1)$, con $n = 4$, calcolare la probabilità p dell'evento $(X_{(2)} < \frac{1}{3}) \vee (X_{(2)} > \frac{2}{3})$, la previsione e la varianza della seconda lacuna.

$p = \frac{14}{27}$ $\mathbb{P}(L_2) = \frac{1}{5}$ $\mathrm{var}(L_2) = \frac{2}{75}$

6. Data una popolazione con distribuzione di Poisson $f(x|\theta) = \frac{\theta^x}{x!}e^{-\theta}$, e dato un campione casuale $x = (4, 7, 6, 5, 3, 8, 4)$ da essa estratto, spiegare il significato del termine "campione casuale" e scrivere la funzione di verosimiglianza. Assegnata poi una distribuzione iniziale $\beta(\theta)$ esponenziale di parametro $\frac{1}{6}$, calcolare la distribuzione finale $\beta(\theta|x)$.

$\alpha(x|\theta) = \frac{\theta^{37}}{4!7! \ldots 4!}e^{-7\theta}$ $\beta(\theta|x) = \frac{1}{37!}\left(\frac{43}{6}\right)^{38}\theta^{37}e^{-\frac{43}{6}\theta}$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 21 settembre 1999

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

Diploma: solo primi 3 esercizi

1. In un controllo di qualità, si estrae un campione di $n = 10$ pezzi da un lotto che ne contiene $N = 50$ fra i quali 2 difettosi. Il lotto viene accettato (sia E questo evento) se nel campione c'è al più un pezzo difettoso: calcolare (con tre decimali) la probabilità di E, anche ricorrendo all'approssimazione binomiale.

$$\boxed{P(E) = 0.963 \qquad\qquad P_a(E) = 0.942}$$

2. Per un vettore aleatorio discreto (X, Y) si ha

$$P(X = x, Y = y) > 0$$

solo nei punti $(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$, ed i corrispondenti eventi hanno, rispettivamente, probabilità $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{20}$. Calcolare $P(X \geq 1|X \neq Y)$, cov(X, Y), var$(X - Y)$.

$$\boxed{P(X \geq 1|X \neq Y) = 1 \qquad\qquad \text{cov}(X, Y) = 0.374 \qquad\qquad \text{var}(X - Y) = 0.366}$$

3. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità congiunta $f(x, y) = \frac{1}{9}xy$ in $[0, 2] \times [0, 3]$ (e zero altrove). Calcolare le probabilità

$$\boxed{P(0 < X < \frac{1}{2}) = \frac{1}{16} \qquad\qquad P(0 < Y < 2) = \frac{4}{9} \qquad\qquad P(X = 3Y) = 0}$$

e stabilire se X e Y sono indipendenti. | SÌ NO |

4. Dati tre eventi A, B, E, con $A \subset E$, $A \wedge B = \emptyset$, $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.7$, $P(E) = 0.4$, $P(B \wedge E^c) = 0.5$, stabilire se tali assegnazioni di probabilità sono coerenti. Elencare i costituenti e le relative probabilità.

| COERENTI? SÌ NO |

$$\boxed{C_1 = A^c \cap B^c \cap E^c,\ C_2 = A^c \cap B^c \cap E,\ C_3 = A \cap B^c \cap E,\ C_4 = A^c \cap B \cap E,\ C_5 = A^c \cap B \cap E^c}$$

$$\boxed{\alpha_1 = 0.1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0.2, \quad \alpha_4 = 0.2, \quad \alpha_5 = 0.5,}$$

5. In un processo di Poisson si è osservato un numero di arrivi in $[0, 3]$ uguale a 5. Calcolare la probabilità (condizionata a questa informazione) che tutti gli arrivi si siano verificati nell'intervallo $[0, 1]$, nei due casi di intensità, rispettivamente, π e 2. Calcolare poi i corrispondenti tempi medi di attesa τ_π e τ_2 tra il terzo ed il quarto arrivo.

$$\boxed{p_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \qquad\qquad p_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \qquad\qquad \tau_\pi = \frac{1}{\pi} \qquad\qquad \tau_2 = \frac{1}{2}}$$

6. Dato un numero aleatorio X con distribuzione uniforme sull'intervallo $[-\pi, \pi]$, calcolare la sua funzione caratteristica.

$$\boxed{\varphi_X(t) = \frac{sin(\pi t)}{\pi t}}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 16 ottobre 1999
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Vengono forniti due lotti contenenti, rispettivamente, proporzioni **incognite** α e β di pezzi non difettosi. Si può decidere di accettare entrambi i lotti seguendo una o l'altra delle due seguenti procedure**:** **(a)** si sceglie a caso un lotto, si estrae da esso un pezzo, si rimette a posto, poi si sceglie di nuovo a caso un lotto e si estrae un pezzo**:** *i due pezzi risultano entrambi non difettosi***;** **(b)** si sceglie a caso un lotto, e si estraggono da esso, con restituzione, due pezzi**:** *essi risultano entrambi non difettosi*. Stabilire quale delle due procedure rende più probabile l'accettazione dei lotti.

(a)	(b)

2. Siano A, B, E eventi, con $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.5$, $P(E) = 0.5$, e per i quali è noto che i relativi costituenti sono $C_1 = A^c \wedge B^c \wedge E^c$, $C_2 = A \wedge B \wedge E^c$, $C_3 = A \wedge B^c \wedge E^c$, $C_4 = A \wedge B^c \wedge E$, $C_5 = A^c \wedge B^c \wedge E$. Verificare se le precedenti valutazioni sono coerenti.

COERENTI?	SÌ	NO

3. Dato un canale di trasmissione di tipo binario, consideriamo gli eventi H_j=viene trasmesso il simbolo j, E_j=viene ricevuto il simbolo j, con $j = 0$ e $j = 1$. All'ingresso del canale, la frequenza dei simboli 0 è uguale a 0.4, e la frequenza di quelli che giungono correttamente in ricezione è 0.9**;** per i simboli 1 quest'ultima frequenza è uguale a 0.8. Valutando mediante le suddette frequenze le probabilità dei corrispondenti eventi, calcolare la probabilità (e scriverne l'espressione) che un simbolo uguale a 0 in ricezione sia corretto.

$$\boxed{P(H_o|E_o) = \frac{P(E_o|H_o)P(H_o)}{P(E_o|H_o)P(H_o) + P(E_o|H_1)P(H_1)} = \frac{3}{4}}$$

4. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-(x+y)}, & x > 0,\, y > 0 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Stabilire se i numeri aleatori X e Y sono

SCAMBIABILI	SÌ	NO
INDIPENDENTI	SÌ	NO

e calcolare la probabilità

$$\boxed{P(X \leq Y) = \frac{1}{4}}$$

5. In un processo di Poisson, è uguale a 6 la previsione del numero X di arrivi in $[0, 3]$. Calcolare l'intensità del processo e la probabilità dell'evento E=nessun arrivo in $[0, 1]$, nell'ipotesi che il numero di arrivi in $[0, 3]$ sia uguale a 1.

$\lambda = 2$	$P(E\|X = 1) = \frac{2}{3}$

6. Dati quattro numeri aleatori con distribuzione uniforme su $[0, 2]$, calcolare la previsione della seconda lacuna L_2 e la probabilità dell'evento $E = \{L_3 > \frac{1}{3}\}$.

$\mathbb{P}(L_2) = \frac{2}{5}$	$P(E) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$