CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 11 gennaio 2000
Scrivere (o inserire in un cerchietto quelle corrette) le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Elettronici: nn.1 – 4 **Informatici:** nn.1 – 6

1. Un lotto contiene pezzi buoni ed un solo pezzo difettoso. Si effettuano tre estrazioni senza restituzione, e sia E_i = pezzo difettoso alla i-esima estrazione ($i = 1, 2, 3$). Determinare i costituenti relativi a questi eventi. Stabilire in che relazione stanno fra loro le corrispondenti probabilità p_i, e quale condizione deve essere richiesta affinché esse siano coerenti.

$$\boxed{C_1 = E_1,\ C_2 = E_2,\ C_3 = E_3,\ C_4 = E_1^c \wedge E_2^c \wedge E_3^c, \qquad p_1 = p_2 = p_3 \leq \frac{1}{3}}$$

2. Data un'urna di composizione incognita, sia H l'evento, di probabilità $p \neq 1$, individuato dalla proposizione "l'urna contiene in parti uguali palline bianche e nere". Si estrae una pallina, e sia E l'evento "pallina bianca". Se $P(E|H^c) = \alpha$, calcolare la probabilità di H nell'ipotesi E. Determinare poi α in modo tale che H ed E siano stocasticamente indipendenti.

$$\boxed{P(H|E) = \frac{p}{p + 2(1-p)\alpha} \qquad \alpha = \frac{1}{2}}$$

3. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con distribuzione uniforme sul parallelogramma individuato dalle rette $y = 0$, $y = 1$, $y = x$, $y = x - 1$. Calcolare le funzioni di ripartizione marginali di X ed Y, e stabilire se gli eventi $E = \{X < x\}$ ed $A = \{Y < y\}$ sono stocasticamente indipendenti.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-1)(3-x), & 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

A ed E stocasticamente indipendenti?	SÌ	NO

4. Si suppone che la temperatura rilevata quotidianamente in una data città segua una distribuzione normale $N_{\theta,1}(x)$. Sono state osservate, in 15 giorni diversi, le seguenti temperature (in gradi Celsius):

-2, 0, 1, 3, 2, -1, -1, 0, 3, 4, 5, 5, -2, -2, 0

Determinare la distribuzione di probabilità del numero aleatorio Θ, assumendo come distribuzione iniziale una $N_{2,2}(\theta)$.

$$\boxed{\beta(\theta|x) = N_{m_n,\sigma_n}(\theta),\ m_n = \frac{62}{61},\ \sigma_n = \frac{2}{\sqrt{61}}}$$

5. Si lancia una moneta: dati gli eventi E_n = occorrono n lanci fino alla *prima* uscita di "testa", stabilire se essi sono

equiprobabili	SÌ	NO
scambiabili	SÌ	NO
stocasticamente indipendenti	SÌ	NO
incompatibili	SÌ	NO

6. In un processo di Poisson, la previsione del numero Y di arrivi in $[3, 8]$ è uguale a 10. Calcolare l'intensità del processo e la probabilità dell'evento A=nessun arrivo in $[3, 5]$, nell'ipotesi che il numero di arrivi in $[3, 8]$ sia uguale a 7.

$$\boxed{\lambda = 2 \qquad P(A|Y=7) = \left(\frac{3}{5}\right)^7}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 25 gennaio 2000
Scrivere (o inserire in un cerchietto quelle corrette) le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Elettronici II anno: nn.1 – 4, **Informatici e altri CL:** nn.1 – 6, **Diploma:** nn. 1,3,4

1. Si ritiene, con probabilità $p \neq 1$, che i campioni di acqua prelevati a valle di un depuratore siano tutti inquinati (sia A questo evento). Si estrae "a caso" uno di questi, e sia H l'evento "il campione estratto è inquinato". Se $P(H|A^c) = \alpha$, calcolare la probabilità di A nell'ipotesi H. Determinare poi α in modo tale che H ed A siano stocasticamente indipendenti.

$$P(A|H) = \frac{p}{p + (1-p)\alpha} \qquad \alpha = 1$$

2. Un lotto contiene $N - 2$ pezzi buoni e due pezzi difettosi ($N \geq 5$). Si effettuano tre estrazioni senza restituzione, e sia E_i = pezzo difettoso alla i-esima estrazione ($i = 1, 2, 3$). Determinare i costituenti relativi a questi eventi. Individuare due sottofamiglie di costituenti equiprobabili, e calcolare la probabilità del costituente $E_1^c \wedge E_2^c \wedge E_3^c$.

$$C_1 = E_1 \wedge E_2^c \wedge E_3^c, \quad C_2 = E_1^c \wedge E_2 \wedge E_3^c, \quad C_3 = E_1^c \wedge E_2^c \wedge E_3, \quad C_4 = E_1 \wedge E_2 \wedge E_3^c,$$
$$C_5 = E_1 \wedge E_2^c \wedge E_3, \quad C_6 = E_1^c \wedge E_2 \wedge E_3, \quad C_7 = E_1^c \wedge E_2^c \wedge E_3^c.$$

1^a sottofamiglia: $\{C_1, C_2, C_3\}$ 2^a sottofamiglia: $\{C_4, C_5, C_6\}$

$$P(E_1^c \wedge E_2^c \wedge E_3^c) = \frac{(N-3)(N-4)}{N(N-1)}$$

3. Si suppone che il numero X_k di telefonate che arrivano ad un centralino tra le 8 e le 9 di mattina del giorno k-esimo sia un numero aleatorio con distribuzione di Poisson di parametro incognito θ**;** questo numero aleatorio ha densità iniziale del tipo $\beta(\theta) = \gamma\theta e^{-\theta/4}$, con γ opportuno. Si osserva il numero di telefonate per 10 giorni, ottenendo il campione casuale $x = (6, 3, 4, 5, 6, 5, 2, 7, 7, 5)$. Calcolare la costante γ e la distribuzione finale di Θ.

$$\gamma = \frac{1}{16} \qquad \beta(\theta|x) = G_{c,\lambda}(\theta), \qquad c = 52 \qquad \lambda = \frac{41}{4}$$

4. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con distribuzione uniforme sul parallelogramma individuato dalle rette $y = 0$, $y = 1$, $y = x$, $y = x - 2$. Calcolare le densità marginali di X ed Y, e stabilire se i numeri aleatori X ed Y sono stocasticamente indipendenti.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{2}(3-x), & 2 < x \leq 3 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

X ed Y stocasticamente indipendenti? SÌ NO

5. Si considerino estrazioni senza restituzione da un'urna contenente palline bianche e nere in proporzioni incognite. Stabilire se gli eventi E_i ="pallina bianca alla i-esima estrazione" sono

equiprobabili	SÌ	NO	scambiabili	SÌ	NO
stocasticamente indipendenti	SÌ	NO	incompatibili	SÌ	NO

6. Dato un processo uniforme su $[0, \pi]$, con $n = 7$, calcolare la previsione della terza lacuna L_3 e la probabilità dell'evento $A = \{L_5 > \frac{1}{2}\}$.

$$\mathbb{P}(L_3) = \frac{\pi}{8} \qquad P(A) = \left(1 - \frac{1}{2\pi}\right)^7$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 16 febbraio 2000
Scrivere (o inserire in un cerchietto quelle corrette) le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Diploma: nn. 1 – 3 **Elettronici II anno:** nn.1 – 4 **Informatici et al.:** nn.1 – 6

1. Un numero aleatorio X ha distribuzione uniforme con previsione $\mathbb{P}(X) = 5$ e $\text{var}(X) = 12$. Trovare la densità di probabilità di X.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}, & x \in (-1, 11) \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

2. Un vettore aleatorio (X, Y) ha densità di probabilità $f(x, y) = \frac{1}{2}(x+3y)$ sul quadrato $[0, 1]\times[0, 1]$. Calcolare le distribuzioni marginali, la covarianza di X, Y, e stabilire se X e Y sono indipendenti.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right), & x \in (0, 1) \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 3y\right), & y \in (0, 1) \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} \qquad \text{cov}(X, Y) = -\frac{1}{192}$$

X e Y indipendenti? SÌ NO

3. Si lanciano contemporaneamente due dadi. Si considerino i seguenti eventi
$A =$“i due numeri ottenuti sono diversi tra loro”
$B =$“i due numeri ottenuti sono entrambi pari”
Calcolare le probabilità $P(A|B)$ e $P(B|A)$.

$$P(A|B) = \frac{2}{3} \qquad P(B|A) = \frac{1}{5}$$

4. Dati due eventi A, B con $P(A^c) = \frac{2}{3}, P(B^c) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{3}{8}$, determinare codominio, previsione e varianza del numero aleatorio $X = |B| - |A|$.

$$\mathcal{C}_X = \{-1,\ 0,\ 1\} \qquad \mathbb{P}(X) = \frac{1}{3} \qquad \text{var}(X) = \frac{7}{18}$$

5. Contrassegnare con V (vero) o F (falso) le seguenti affermazioni:

- In un processo uniforme, le lacune non hanno la stessa varianza V F
- Numeri aleatori scambiabili hanno la stessa distribuzione V F
- In un processo di Poisson, gli arrivi in $(0, t)$ hanno distribuzione esponenziale V F
- Le statistiche d’ ordine di un processo uniforme sono scambiabili V F

6. I costituenti relativi agli eventi A, B, E sono

$$C_1 = A \wedge B \wedge E^c\ ,\ \ C_2 = A \wedge B^c \wedge E\ ,\ \ C_3 = A^c \wedge B^c \wedge E.$$

Determinare se le valutazioni $P(A) = 0.5,\ P(B) = 0.3,\ P(E) = 0.7$ sono coerenti. Verificare poi la coerenza delle valutazioni $P_1(A) = 0.7,\ P_1(B) = 0.3,\ P_1(E) = 0.5$.

Coerenza di P SÌ NO – Coerenza di P_1 SÌ NO

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 19 aprile 2000

Scrivere le risposte negli appositi spazi e motivarle *dettagliatamente* su fogli allegati

1. Data una successione $\{E_i\}$ di eventi indipendenti ed equiprobabili con $P(E_i) = \frac{1}{3}$, si consideri il numero aleatorio $X =$ "numero di prove fino al 1° successo". Calcolare la previsione di $Y = 3X$ e la probabilità dell' evento $E = (6 \leq Y \leq 9)$.

$$\boxed{\mathbb{P}(Y) = 9 \qquad\qquad P(E) = \frac{10}{27}}$$

2. Dati tre numeri aleatori X, Y, Z con $\text{var}(X) = \text{var}(Y) = \text{var}(Z) = 4$ e con $\rho(X,Y) = \rho(X,Z) = \rho(Y,Z) = \frac{1}{2}$, e posto $U = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y - \frac{1}{2}Z$, calcolare

$$\boxed{\text{var}(U) = 2 \qquad\qquad \text{var}(X-Y) = 4 \qquad\qquad \text{cov}(2X, -Y) = -4}$$

3. Sia (X,Y) un vettore aleatorio con distribuzione uniforme sull'insieme

$$A = \{x \in [0,1],\ y \in [0, \log(x+1)]\}.$$

Determinare la densità congiunta $h(x,y)$, la densità marginale $h_1(x)$ e, per ogni fissato $x \in [0,1]$, la densità condizionata $h_2(y|x)$.

$$\boxed{h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\log 2 - 1} & (x,y) \in A \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad\qquad h_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(x+1)}{2\log 2 - 1} & x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}}$$

$$\boxed{h_2(y|x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\log(x+1)} & y \in (0, \log(x+1)) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}}$$

4. Utilizzando i costituenti generati dagli eventi A, B, C, calcolare $P(A \wedge B)$, $P(A^c \wedge B^c \wedge C), P(B)$, sapendo che i tre eventi dati sono scambiabili e che $P(A \wedge B \wedge C) = P(A^c \wedge B^c \wedge C^c) = \frac{1}{8}, P(A^c \wedge B \wedge C) = \frac{3}{20}$.

$$\boxed{P(A \wedge B) = \frac{11}{40} \qquad\qquad P(A^c \wedge B^c \wedge C) = \frac{1}{10} \qquad\qquad P(B) = \frac{21}{40}}$$

5. Si estraggono a caso senza restituzione n pezzi da un lotto che ne contiene 5, ottenendo sempre pezzi difettosi. Se è noto che il lotto contiene al più un pezzo non difettoso, calcolare il numero n di estrazioni necessarie affinché la probabilità di

$$H = \text{"il lotto contiene un pezzo non difettoso"},$$

che prima delle estrazioni era stata valutata $P(H) = \frac{1}{2}$, risulti minore o uguale di $\frac{3}{10}$.

$$\boxed{n = 3}$$

6. Si consideri l'intervallo $[0,2]$ e un punto x al suo interno e si scelgano "a caso" in $[0,2]$ tre punti X_1, X_2, X_3. Calcolare la probabilità p che almeno due di essi appartengano a $[0,x]$, e la previsione del numero aleatorio $Y = 3(X_{(3)} - X_{(1)})$.

$$\boxed{p = \frac{x^2}{4}(3-x) \qquad\qquad \mathbb{P}(Y) = 3}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 30 maggio 2000
Scrivere (o inserire in un cerchietto quelle corrette) le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
1° Modulo: nn.1 – 4 **Corso intero :** nn.1 – 6

1. Si effettuano due estrazioni con restituzione da un'urna contenente 3 palline bianche e 2 nere. Dati gli eventi $A =$ "pallina nera alla prima estrazione", $B =$ "pallina bianca alla prima estrazione", $E =$ "pallina bianca alla seconda estrazione" determinare i costituenti possibili (relativi ai tre eventi dati) e le loro probabilità.

$C_1 = A \wedge B^c \wedge E;\ C_2 = A^c \wedge B \wedge E;\ C_3 = A \wedge B^c \wedge E^c;\ C_4 = A^c \wedge B \wedge E^c$

$P(C_1) = \frac{6}{25}$ $P(C_2) = \frac{9}{25}$ $P(C_3) = \frac{4}{25}$ $P(C_4) = \frac{6}{25}$

2. Sia X un numero aleatorio con distribuzione geometrica di parametro p e sia $Y = 3X$. Dati k e n interi positivi, calcolare

$\mathbb{P}(Y) = \frac{3}{p}$ $P(3k \leq Y \leq 3k+2) = (1-p)^{k-1}p$ $P(Y > 3(n+k)|X > k) = (1-p)^n$

3. Dato un vettore aleatorio (X, Y) con distribuzione uniforme sul cerchio unitario, calcolare la probabilità dell'evento $E = \left(-\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \leq Y \leq \frac{2}{3}\right)$.

$P(E) = \frac{8}{9\pi}$

4. Un lotto contiene un gran numero di pezzi di due tipi: buoni (B) e difettosi (D). La frazione θ di pezzi buoni ha una distribuzione iniziale del tipo $\longrightarrow$

$$\beta(\theta) = \begin{cases} \frac{k}{\theta}, & \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si estraggono 4 pezzi, ottenendo $x = (B, B, B, B)$. Determinare, utilizzando per la verosimiglianza l'approssimazione binomiale, la distribuzione finale di θ.

$$\beta(\theta|x) = \begin{cases} \frac{64}{15}\theta^3 & \left(\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1\right) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

5. Data un'urna di composizione incognita, contenente palline bianche o nere, sia
$H_r =$ le palline bianche nell'urna sono r ($r = 1, \ldots, N$). Si effettuano n estrazioni con restituzione; posto $E_i =$ "pallina bianca alla i-esima estrazione" ed $E =$"h palline bianche su n estrazioni", si chiede

Gli eventi E_1 ed E_2 sono logicamente indipendenti ?	SÌ	NO
Gli eventi E_i ($i = 1, \ldots, n$) sono stocasticamente indipendenti?	SÌ	NO
Gli eventi E_i ($i = 1, \ldots, n$) sono scambiabili?	SÌ	NO

Calcolare $P(E_i|H_r) = \frac{r}{N}$ $P(E|H_r) = \binom{n}{h}\left(\frac{r}{N}\right)^h\left(1-\frac{r}{N}\right)^{n-h}$

6. Dati 5 numeri aleatori indipendenti e con distribuzione uniforme su $[0, c]$, si ha

(NON È NECESSARIO FARE CALCOLI !)

(i)	$\mathbb{P}(X_{(4)} - X_{(1)}) = \mathbb{P}(X_{(3)})$	SÌ	NO
(ii)	Le statistiche d'ordine hanno distribuzione esponenziale	SÌ	NO

Se $Y_1, \ldots, Y_5$ sono numeri aleatori non indipendenti, si può avere

(iii)	$Y_1 = X_{(1)}, \ldots, Y_5 = X_{(5)}$	SÌ	NO
(iv)	$Y_1 = L_1, \ldots, Y_5 = L_5$	SÌ	NO
(v)	Detta l_k la densità di L_k ($k = 1, \ldots, 5$), essa non dipende da k	SÌ	NO

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 13 giugno 2000
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
1° Modulo: nn.1 – 4 **Corso intero :** nn.1 – 6

1. Da due sacchetti contenenti i 90 numeri della tombola, due persone estraggono indipendentemente con restituzione, una pallina numerata fino a quando viene estratto per la prima volta un multiplo di 10 (la prima persona) oppure un numero multiplo di 15 (la seconda persona). Se N è il numero (aleatorio) di estrazioni che la seconda persona fa in più rispetto alla prima, calcolare la previsione di N.

$$\boxed{\mathbb{P}(N) = 5}$$

2. È noto che un lotto di 50 pezzi contiene o pezzi tutti difettosi (evento H, con probabilità $1/10$) oppure un solo pezzo difettoso. Calcolare la probabilità condizionata di H nell'ipotesi D che, effettuando una sola estrazione, si trovi un pezzo difettoso.

$$\boxed{P(H|D) = \frac{50}{59}}$$

3. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} k(1-xy)\ , & (x,y) \in A \\ 0\ , & \text{altrove} \end{cases}$$

essendo A il quadrato di vertici $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$. Determinare la costante k e, per ogni $x \in [0,1]$ fissato, la densità condizionata marginale di $Y|x$.

$$\boxed{k = \frac{4}{3} \qquad f_Y(y|x) = \begin{cases} \dfrac{1-xy}{1-\dfrac{x}{2}}, & y \in [0,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}}$$

4. Un numero aleatorio X ha codominio $\{1, 3, 5, x\}$, con probabilità rispettive $\{\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, p\}$ e previsione $\mathbb{P}(X) = 5$. Calcolare la varianza del numero aleatorio $Y = 3X + 2$.

$$\boxed{\text{var}(Y) = 36}$$

5. Dato un processo uniforme su $[0,1]$, con $n = 4$, calcolare la probabilità dell' evento $\left(X_{(3)} \geq \frac{1}{3}\right)$ e la previsione di $X_{(3)} - X_{(1)}$.

$$\boxed{P\left(X_{(3)} \geq \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9} \qquad \mathbb{P}(X_{(3)} - X_{(1)}) = \frac{2}{5}}$$

6. Siano $\phi_X(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{6}t^3$, $\phi_Y(t) = \frac{1}{4}t + \frac{3}{4}t^2$ le funzioni generatrici di due numeri aleatori indipendenti discreti a valori interi ≥ 0. Determinare il loro codominio e quello del numero aleatorio $Z = X + Y$. Calcolare poi $F(\frac{5}{2})$ ed $F(2\pi)$, essendo F la funzione di ripartizione di Z.

$$\boxed{\begin{array}{lll} C_X = \{0,1,3\} & C_Y = \{1,2\} & C_Z = \{1,2,3,4,5\} \\ F\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{11}{24} & F(2\pi) = 1 & \end{array}}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 27 giugno 2000
Scrivere (o inserire in un cerchietto quelle corrette) le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
1° Modulo: nn.1 – 4 **Corso intero :** nn.1 – 6

1. Il numero X di chiamate telefoniche che arrivano in 1 ora ad un ufficio segue la distribuzione di Poisson, e la probabilità che in tale intervallo di tempo non arrivi alcuna telefonata è uguale ad e^{-3}. Calcolare il numero medio Y di telefonate che arrivano all'ufficio fra le 9 e le 13.

$$\boxed{Y = 12}$$

2. Un lotto contiene 8 pezzi difettosi e 20 buoni. Calcolare il numero (minimo) n di estrazioni (con restituzione) necessarie affinchè la probabilità che venga estratto almeno un pezzo difettoso sia maggiore di $\frac{3}{4}$.

$$\boxed{n = 5}$$

3. Sia T il tempo di attesa fino al primo guasto di un sistema costituito da due componenti A e B in serie. Il componente A ha un tempo di attesa X fino al primo guasto con distribuzione esponenziale di parametro 2, mentre quello Y del componente B ha distribuzione esponenziale di parametro 3. Supponendo X e Y indipendenti, determinare il tasso di avaria del numero aleatorio T.

$$\boxed{h(t) = 5}$$

4. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} kxy\ , & (x,y) \in A \\ 0\ , & \text{altrove} \end{cases}$$

essendo $A = \{(x,y) \ : \ 2 \leq x \leq 4\ ,\ 2 \leq y \leq 4\}$. Determinare la costante k e la previsione di $Z = \frac{1}{XY}$.

$$\boxed{k = \frac{1}{36} \qquad\qquad \mathbb{P}(Z) = \frac{1}{9}}$$

5. Contrassegnare le risposte corrette:

-	Le lacune di un processo uniforme sono numeri aleatori indipendenti e con la stessa distribuzione	SÌ	NO
-	Eventi scambiabili sono indipendenti ed equiprobabili	SÌ	NO
-	Le lacune di un processo uniforme non sono indipendenti	SÌ	NO
-	Eventi indipendenti ed equiprobabili sono incompatibili	SÌ	NO
-	Esiste un valore k tale che la densità della k-esima statistica d'ordine coincide con la densità della k-esima lacuna	SÌ	NO

6. Dato un processo di Poisson di intensità $\lambda = 1$, siano rispettivamente X e Y gli arrivi in $[0, 2]$ e in $(2, 3]$. Calcolare la probabilità dell'evento $\{X + Y > 0\}$, la previsione di $X + Y$ e la probabilità condizionata di $(X = 0|X + Y = 1)$.

$$\boxed{P(X+Y>0) = 1 - e^{-3} \qquad \mathbb{P}(X+Y) = 3 \qquad P(X=0|X+Y=1) = \frac{1}{3}}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 11 luglio 2000
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
1° Modulo: nn.1 – 4 **Corso intero :** nn.1 – 6

1. Date due apparecchiature A e B, il tempo di attesa (misurato in ore) fino al primo guasto di B ha un andamento quadratico rispetto a quello di A. Se il tempo di attesa X fino al primo guasto di A ha distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{4}$, e se B viene messo in funzione 2 ore prima di A, calcolare la previsione del tempo di attesa Y fino al primo guasto di B.

$$\boxed{\mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}[(X+2)^2] = 52}$$

2. Sia H l'evento, di probabilità $\frac{1}{3}$, "un' urna contiene tutte palline bianche". Se l'urna contiene 10 palline, sia $H^c =$"l'urna contiene una sola pallina bianca". Si effettua una estrazione, e si trova una pallina bianca (sia A questo evento): calcolare $P(H|A)$.

$$\boxed{P(H|A) = \frac{5}{6}}$$

3. Tra due punti A e B passa corrente attraverso due conduttori in parallelo. Il primo ha un interruttore I_1, l'altro due interruttori I_2, I_3 in serie: indicando con gli stessi simboli I_k ($k = 1,2,3$) gli eventi (stocasticamente indipendenti) che affermano che il corrispondente interruttore è chiuso (passa corrente), calcolare la probabilità dell'evento $C =$"passa corrente fra A e B", sapendo che $P(I_1) = P(I_2) = \frac{1}{2}, P(I_3) = \frac{1}{3}$.

$$\boxed{P(C) = \frac{7}{12}}$$

4. Se X e Y sono numeri aleatori indipendenti con distribuzione normale standard, è noto che $Z = 3X - 7Y$ ha distribuzione normale. Calcolare previsione e varianza di Z, e la covarianza di X e Z.

$$\boxed{\mathbb{P}(Z) = 0 \qquad \text{var}(Z) = 58 \qquad \text{cov}(X,Z) = 3}$$

5. Siano X_1, X_2, X_3 numeri aleatori indipendenti e con distribuzione uniforme su $[0,2]$. Calcolare la probabilità degli eventi $\{X_{(2)} \leq 1\}, \{X_{(3)} \leq 2\}$ e la previsione della lacuna L_2.

$$\boxed{P(X_{(2)} \leq 1) = \frac{1}{2} \qquad P(X_{(3)} \leq 2) = 1 \qquad \mathbb{P}(L_2) = \frac{1}{2}}$$

6. Siano X e Y, rispettivamente, gli arrivi in $[0,1]$ e $(1,3]$ di un processo di Poisson di intensità $\lambda = 1$. Calcolare la probabilità che non si abbia alcun arrivo nei due intervalli e, posto $A = \{X + Y = 2\}$, calcolare la previsione di $X|A$.

$$\boxed{P(X=0, Y=0) = e^{-3} \qquad \mathbb{P}(X|A) = \frac{2}{3}}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 15 settembre 2000
Scrivere (o inserire in un cerchietto quelle corrette) le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
1^o **Modulo:** nn.1 – 4 **Corso intero:** nn.1 – 6

1. Siano A, B, C tre eventi di probabilità, rispettivamente, $\alpha, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ e tali che $A \wedge B \wedge C^c = \emptyset$, $A \wedge B^c \wedge C = \emptyset$, $A^c \wedge B \wedge C = \emptyset$, $A^c \wedge B^c \wedge C^c = \emptyset$. Determinare per quali valori di α dette probabilità sono coerenti. $\boxed{\frac{1}{6} \leq \alpha \leq \frac{5}{6}}$

2 Sia X un numero aleatorio con distribuzione uniforme in $[0, 1]$: determinare la distribuzione di $Y = -\log X$.

$$\boxed{F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y}\,, & y \geq 0 \\ 0\,, & y < 0 \end{cases}}$$

3 Sia $X = \{$ numero di lanci di un dado fino all'uscita del numero 6 per la prima volta$\}$,
$Y = \{$ numero di lanci di un dado fino all'uscita del numero 6 per la seconda volta$\}$.
Calcolare la probabilità degli eventi $\{X = n\}, \{Y - X = m\}$ e quella dell'evento condizionato $\{(Y - X = m)|X = n\}$.

$$\boxed{P(X = n) = \frac{5^{n-1}}{6^n} \quad P(Y - X = m) = \frac{5^{m-1}}{6^m} \quad P((Y - X = m)|X = n) = \frac{5^{m-1}}{6^m}}$$

4 Una fabbrica con due macchinari diversi M_1, M_2 produce, nelle proporzioni rispettive p e q ($p, q > 0, p + q = 1$), dei pezzi indistinguibili, ma di qualità diversa, con tempi di vita esponenziali, di parametri rispettivi λ, $\mu > 0$. Scelto un pezzo a caso, determinare la distribuzione di probabilità del suo tempo di vita T. Calcolare $\mathbb{P}(T)$.
Supponendo che il pezzo sia in vita al tempo s, qual è la probabilità che sia stato prodotto da M_1 ?

$$\boxed{F_T(t) = \begin{cases} 1 - pe^{-\lambda t} - qe^{-\mu t}\,, & t \geq 0 \\ 0\,, & t < 0 \end{cases} \quad \mathbb{P}(T) = \frac{p}{\lambda} + \frac{q}{\mu} \quad P(M_1|T > s) = \frac{pe^{-\lambda s}}{pe^{-\lambda s} + qe^{-\mu s}}}$$

5 Dato un processo di Poisson di intensità $\alpha = \frac{1}{3}$, si supponga che il numero di "arrivi" nell'intervallo $[0, 2]$ sia uguale a 4. Calcolare, in tale ipotesi, la probabilità p che tutti gli arrivi si verifichino prima di un fissato istante $t \in \mathbb{R}^+$, | p dipende da α ? SÌ NO |
Determinare la densità di probabilità $f(\tau)$ del tempo di attesa fra primo e secondo arrivo.

$$\boxed{p = \begin{cases} \frac{t^4}{16}\,, & t \in [0, 2] \\ 1\,, & t \geq 2 \end{cases} \qquad f(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}\tau}\,, & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}}$$

6 Contrassegnare con V (vero) o F (falso) le seguenti affermazioni:

- Le distribuzioni marginali del vettore (X, Y) si possono determinare a partire dalla distribuzione congiunta solo se X e Y sono indipendenti | F |
- Eventi scambiabili sono indipendenti | F |
- La distribuzione congiunta del vettore (X, Y) si può determinare a partire dalle distribuzioni marginali se X e Y sono indipendenti | V |
- Le lacune di un processo uniforme hanno stessa varianza | V |
- La densità dell'ultima statistica d' ordine coincide con la densità dell'ultima lacuna | F |

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 14 ottobre 2000
Scrivere (o inserire in un cerchietto quelle corrette) le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
1^o **Modulo:** nn.1 – 4 **Corso intero:** nn.1 – 6

1. Si lanciano 5 dadi; calcolare la probabilità p che almeno tre di essi mostrino la stessa faccia.

$$\boxed{p = \frac{23}{108}}$$

2. Tre scatole contengono ciascuna due biglie, la prima ne ha due bianche, la seconda una bianca e una gialla, la terza due gialle. Si sceglie una scatola a caso e quindi da essa una biglia. Nell'ipotesi che la biglia sia gialla, qual è la probabilità p che sia gialla anche l'altra biglia ?

$$\boxed{p = \frac{2}{3}}$$

3 Una fabbrica produce fusibili per televisori: si estraggono (con restituzione) 15 pezzi da un lotto e si osserva che 5 di essi sono difettosi. Il numero aleatorio Θ rappresenta la frazione θ di pezzi difettosi nel lotto, e come distribuzione iniziale $\beta(\theta)$ si sceglie $B_{10,2}(\theta)$.
Determinare la distribuzione di probabilità finale $\beta(\theta|x)$.

$$\boxed{\beta(\theta|x) = \frac{26!}{14!11!}\theta^{14}(1-\theta)^{11} = B_{15,12}(\theta)}$$

4 Sia X un numero aleatorio con distribuzione normale di valor medio μ e varianza σ^2. Determinare la funzione caratteristica di $Z = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$.

$$\boxed{\phi_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2it}}}$$

5. Sono scelti 5 punti a caso nell'intervallo $[0,1]$, e sia $X_{(1)}$ la prima statistica d'ordine; calcolare la funzione di ripartizione di $Y = \log X_{(1)}$.

$$\boxed{F_Y(y) = \begin{cases} 1-(1-e^y)^5, & y \leq 0 \\ 1, & y \geq 0 \end{cases}}$$

6 Contrassegnare con V (vero) o F (falso) le seguenti affermazioni:

- Se $E_1, \ldots, E_n$ sono stocasticamente indipendenti a due a due, allora $E_1, \ldots, E_n$ sono stocasticamente indipendenti $\boxed{\text{F}}$
- L'indipendenza logica implica l'indipendenza stocastica $\boxed{\text{F}}$
- Un numero aleatorio con distribuzione di Poisson ha previsione e varianza coincidenti $\boxed{\text{V}}$
- La probabilità condizionata può essere definita solo quando l'evento condizionante ha probabilità positiva $\boxed{\text{F}}$
- Data un'urna di composizione incognita, si effettuano estrazioni **con restituzione**. Gli eventi E_j ="pallina bianca alla j-esima estrazione" sono indipendenti $\boxed{\text{F}}$