**CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 11 gennaio 2001**
Scrivere (o inserire in un cerchietto quelle corrette) le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
$1^o$ **Modulo:** nn.1 – 4 **Corso intero:** nn.1 – 6

**1.** Siano dati gli eventi $E_1, E_2, E_3$ di probabilità rispettivamente $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, con $E_1 \wedge E_3 = \emptyset$ . Questa assegnazione di probabilità è coerente ? | SÌ NO |

**2.** Due dadi vengono lanciati 72 volte. Qual è la probabilità di ottenere la somma dei punti uguale a 2 per almeno 2 volte? Calcolare tale probabilità in modo esatto e poi mediante una opportuna approssimazione.

$$p = 1 - \frac{107}{36}\left(\frac{35}{36}\right)^{71}, \qquad \tilde{p} = 1 - 3e^{-2}$$

**3** In una fabbrica di biscotti le tre linee di produzione A, B, C, sfornano rispettivamente il $55\%$, il $30\%$ e il $15\%$ della produzione totale. Supposto che le percentuali di biscotti bruciati che provengono dalle tre linee siano rispettivamente il $2\%$, il 3% e il $6\%$, calcolare la probabilità $p_1$ che un biscotto scelto a caso tra la produzione totale sia bruciato e la probabilità $p_2$ che un biscotto bruciato provenga dalla linea C.

$$p_1 = 0.029 \qquad p_2 = \frac{9}{29}$$

**4** Sia $(X, Y)$ un vettore aleatorio con distribuzione uniforme $f(x, y) = k$ sul trapezio isoscele che ha base maggiore, sull'asse $x$, di lunghezza 2 , base minore di lunghezza 1 e altezza pari a $\frac{1}{2}$. Determinare $k$, la densità di $X$ e la funzione di ripartizione di $Y$.

$$k = \frac{4}{3} \qquad f_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} < x \le \frac{3}{2} \\ \frac{4}{3}(2-x) & \frac{3}{2} < x \le 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \frac{4}{3}(2-y)y & 0 \le y \le \frac{1}{2} \\ 1 & y > \frac{1}{2} \end{cases}$$

**5.** Sia $h(x) = \lambda + cx^3$: determinare i valori di $\lambda$ e $c$ per i quali $h(x)$ è una funzione di rischio, e determinare la densità di probabilità del numero aleatorio $X$ che rappresenta la durata del sistema.

$$\lambda \in I\!R^+ \qquad c \in I\!R^+ \qquad f(x) = (\lambda + cx^3)e^{-[\lambda x + c\frac{x^4}{4}]}$$

**6** Contrassegnare con V (vero) o F (falso) le seguenti affermazioni:

- In un processo di Poisson, il numero di arrivi in $(t_1, t_2)$, con $t_1 < t_2$, ha distribuzione di Poisson — V
- Se la risposta alla precedente affermazione è F, dire qual è la distribuzione; se è V, dire qual è il relativo parametro — $\lambda(t_2 - t_1)$
- In un processo di Poisson i tempi di attesa fra due arrivi hanno distribuzione uniforme — F
- Le lacune di un processo uniforme non hanno la stessa varianza — F
- Le lacune di un processo uniforme hanno distribuzione uniforme — F

**CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 25 gennaio 2001**
Scrivere (o inserire in un cerchietto quelle corrette) le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
$1^o$ **Modulo:** nn.1 – 4 **Corso intero:** nn.1 – 6

**1.** Agli eventi $E_1, E_2, E_3$, tali che $E_1^c \wedge E_2^c \wedge E_3^c = \emptyset$, si assegnano probabilità rispettive $\frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}$.

Questa assegnazione di probabilità è coerente ? | SÌ NO |

**2.** È noto che la percentuale delle persone che hanno i capelli rossi, in Piemonte, in Sardegna e nelle Marche è rispettivamente del $5\%$, $1\%$ e il $2\%$. Le tre regioni hanno rispettivamente $4.5$, $2$ e $1.5$ milioni di abitanti; calcolare la probabilità che la regione d'origine di una persona, scelta a caso tra gli abitanti delle tre regioni, sia il Piemonte, supposto che:
a) abbia i capelli rossi
b) non abbia i capelli rossi.

$p_a = 0.8182$ $p_b = 0.5534$

**3** Sia $X$ un numero aleatorio che assume i valori $\{1, 2, 3, x\}$ con probabilità rispettivamente $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, p$.
Si determinino $p$ e $x$ nell'ipotesi che $\mathbb{P}(X) = 2.7$.

$p = \frac{1}{5}$ $x = 4$

**4** Siano $X$ e $Y$ la deformazione longitudinale e laterale di sbarre fabbricate con una lega sperimentale. Il vettore $(X, Y)$ assume i valori $\{(0.3, 0.11), (0.4, 0.14), (0.2, 0.06), (0.5, 0.16), (0.6, 0.22)\}$ con uguale probabilità $p$. Determinare il coefficiente di correlazione $\rho_{X,Y}$ e la retta di regressione $Y = bX + a$ .

$\rho_{X,Y} = 0.9860$ $b = 0.37$ $a = -0.01$

**5.** Le telefonate che arrivano al "113" si susseguono nel tempo secondo un processo di Poisson di intensità $2.5$ all'ora. Si calcoli:
a) la probabilità $p_a$ che in 3 ore arrivino non più di 2 chiamate
b) la probabilità $p_b$ che tra 2 chiamate consecutive intercorra almeno mezzora.

$p_a = 0.02$ $p_b = e^{-\frac{5}{4}} = 0.2865$

**6** Tra le chiamate al "113" dell'esercizio precedente, è noto che una frazione $\frac{3}{10}$ si rivelano falsi allarmi. Si calcoli la probabilità $p$ che su 5 chiamate consecutive almeno 2 siano falsi allarmi.

$p = 0.4718$

**CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 17 febbraio 2001**
Scrivere (o inserire in un cerchietto quelle corrette) le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
$1^o$ **Modulo:** nn.1 – 4 **Corso intero:** nn.1 – 6

**1.** Siano $E_1, E_2, E_3$ tre eventi tali che $E_1 \wedge E_2 = \emptyset$, $E_1 \vee E_2 \subseteq E_3$. Determinare l'insieme $\mathcal{C}_X$ dei valori possibili del numero aleatorio $X = 2|E_1| + 7|E_2| + |E_3|$. Posto $p_k = P(E_k)$, $k = 1, 2, 3$, calcolare la previsione $\mathbb{P}(X)$ e la probabilità dell'evento $P(E_1^c \wedge E_2^c \wedge E_3)$.

$\mathcal{C}_X = \{0, 1, 3, 8\}$ $\mathbb{P}(X) = 2p_1 + 7p_2 + p_3$ $P(E_1^c \wedge E_2^c \wedge E_3) = p_3 - p_1 - p_2$

**2.** Scrivere i costituenti relativi ai tre eventi di **1.** e calcolarne la probabilità $\alpha_k$. Rappresentare $X$ come combinazione lineare degli indicatori di tali costituenti e ricalcolare $\mathbb{P}(X)$.

$C_1 = E_1 \wedge E_2^c \wedge E_3,\ C_2 = E_1^c \wedge E_2 \wedge E_3,\ C_3 = E_1^c \wedge E_2^c \wedge E_3,\ C_4 = E_1^c \wedge E_2^c \wedge E_3^c$
$\alpha_1 = p_1,\ \alpha_2 = p_2,\ \alpha_3 = p_3 - p_1 - p_2,\ \alpha_4 = 1 - p_3$
$X = 3|C_1| + 8|C_2| + 1|C_3|$ $\mathbb{P}(X) = 2p_1 + 7p_2 + p_3$

**3.** Sia $(X, Y)$ un vettore aleatorio con codominio $A = (x > 0, y > 0)$ e densità di probabilità

$$f(x,y) = \begin{cases} ke^{(-\lambda_1 x - \lambda_2 y)} & \text{per } (x,y) \in A \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Determinare il valore $k$, il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$ e la varianza var$(2X - 3Y)$.

$k = \lambda_1\lambda_2$ $\rho(X,Y) = 0$ $\text{var}(2X - 3Y) = \dfrac{4}{\lambda_1^2} + \dfrac{9}{\lambda_2^2}$

**4** Siano $X_1, \ldots, X_4$ numeri aleatori di codominio $(0, 1)$ e con uguale densità $f(x) = kx^2$, per $x \in (0, 1)$. Determinare la funzione di ripartizione $F(x)$. Definiti gli eventi $E_i = (0 \leq X_i \leq x)$, $i = 1, 2, 3, 4$, calcolare $x$ tale che $P(E_i) = 0.027$ e la previsione del numero aleatorio $N$ di eventi che si verificano fra quelli considerati.

$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^3 & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ $x = 0.3$ $\mathbb{P}(N) = 4 \times 0.027 = 0.108$

**5.** Sia $\{X_n\}$ un processo di Bernoulli con probabilità $p$ di vincere a ogni colpo. Si denoti con $N_1$ il numero di prove fino alla prima vincita e $N_2$ il numero di prove fino alla seconda vincita. Posto $W = \min(N_1, N_2 - N_1)$, si determini $P(W = 3)$, decomponendo tale evento nell'unione di due eventi compatibili.

$P(W = 3) = q^4(1 - q^2)$

**6.** Contrassegnare con V (vero) o F (falso) le seguenti affermazioni:

- I numeri aleatori $X, Y$ con distribuzione congiunta $f_{X,Y}(x, y) = 6(x - y)$ in $0 \leq y \leq x \leq 1$ e 0 altrove sono stocasticamente indipendenti F
- I numeri aleatori $X, Y$ del punto precedente sono scambiabili F
- Gli eventi $E_i =$"pallina bianca all'$i$-esima estrazione" sono scambiabili solo se si effettuano estrazioni con restituzione F
- La funzione caratteristica della somma di due numeri aleatori stocasticamente indipendenti è il prodotto delle funzioni caratteristiche dei due numeri aleatori V
- Condizione necessaria e sufficiente affinché $h(x)$ sia una funzione di rischio è che sia strettamente positiva sull'insieme dei valori assunti dal numero aleatorio F

**CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 21 aprile 2001**

Scrivere (o inserire in un cerchietto quelle corrette) le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

$1^o$ **Modulo:** nn.1 – 4 **Corso intero:** nn.1 – 6

**1.** Sia $X$ un numero aleatorio con distribuzione normale $N_{\mu,\sigma}(x)$ con media $\mu$ e varianza $\sigma^2$. Si consideri la funzione

$$f(y) = \begin{cases} \alpha \, N_{\mu,\sigma}(y) & y \in [\mu - k\sigma, \mu + k\sigma] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e si determini $\alpha$ affinché $f(y)$ sia una distribuzione di probabilità.

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2\Phi(k) - 1}}$$

**2.** Un'urna contiene 5 palline bianche, 6 nere, 4 rosse. Calcolare le probabilità $p_c$ e $p_s$ che si estraggano due palline dello stesso colore *con* restituzione e *senza* restituzione.

$$\boxed{p_c = \frac{77}{225} \qquad\qquad p_s = \frac{31}{105}}$$

**3.** Dato un campione casuale $x = (5, -4, -1)$ estratto da una popolazione normale $N_{\theta,1}(x)$ e supposto che $\theta$ abbia distribuzione iniziale $N_{0,1}(\theta)$, calcolare la previsione $m$ e la varianza $\sigma^2$ di $\theta|x$.

$$\boxed{m = 0 \qquad\qquad \sigma^2 = \frac{1}{4}}$$

**4** In un industria dolciaria si producono tre tipi di torte al cioccolato $T_1$, $T_2$ e $T_3$. Quelle prodotte di tipo $T_1$ sono il doppio di quelle di tipo $T_2$, mentre quelle di tipo $T_3$ sono in uguale quantità a quelle di tipo $T_2$. Supposto che le percentuali di torte bruciate che provengono dalle tre linee siano rispettivamente il $2\%$, il $3\%$ e il $6\%$, calcolare la probabilità $p$ che una torta bruciata sia di tipo $T_3$.

$$\boxed{p = \frac{6}{13}}$$

**5** Nell'intervallo $[0, 3]$ si scelgono a caso dei punti, generandone al massimo 3 e interrompendo l'esperimento se un punto scelto a caso cade in $[1, 2)$. Se $X$ è il numero di punti generati, si calcoli $P(X \leq 2)$. (Conviene calcolare <u>prima</u> la probabilità dell'evento contrario...)

$$\boxed{P(X \leq 2) = \frac{5}{9}}$$

**6.** Siano $E_1, E_2, E_3$ tre eventi logicamente indipendenti. Esiste una probabilità $P$ che renda equiprobabili i costituenti generati dai tre eventi ? | SÌ NO |

Tale probabilità $P$ rende i tre eventi scambiabili ? | SÌ NO |

**CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 29 maggio 2001**
Scrivere (o inserire in un cerchietto quelle corrette) le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
$1^o$ **Modulo:** nn.1 – 4 **Corso intero:** nn.1 – 6

**1.** Stabilire se la valutazione di probabilità $P(E) = \frac{3}{4}$, $P(F) = \frac{4}{5}$, $P(E \vee F) = \frac{5}{6}$ è coerente e se gli eventi $E$ ed $F$ sono stocasticamente indipendenti.

$P$ è coerente ? | SÌ | NO |

$E$ ed $F$ sono stocasticamente indipendenti ? | SÌ | NO |

**2.** Un vettore aleatorio $(X, Y)$ ha densità di probabilità $f(x, y) = k(x + 3y)$ (con $k$ costante opportuna) su $[0, 1] \times [0, 2]$. Determinare $k$, le distribuzioni marginali e stabilire se $X$ e $Y$ sono indipendenti.

$$k = \frac{1}{7} \qquad f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{7}(x+3) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{14}(6y+1) & 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$X$ ed $Y$ sono stocasticamente indipendenti? | SÌ | NO |

**3** Siano $X$ ed $Y$ l'altezza dei pigmei e dei vatussi con distribuzione $N_{1.40,1}(x)$ e $N_{2,1}(y)$, rispettivamente. Scelto un individuo da una popolazione composta da vatussi $V$ e pigmei $G$ nelle proporzioni $p$ e $q$ ($p, q > 0$ e $p + q = 1$), determinare la funzione di ripartizione della sua altezza $Z$ e la previsione $\mathbb{P}(Z)$. Si calcoli, supposto che l'altezza dell'individuo scelto sia maggiore di $s$, quale è la probabilità che l'individuo sia un pigmeo.

$$F_Z(z) = q\Phi(z - 1.40) + p\Phi(z - 2) \qquad \mathbb{P}(Z) = 1.40q + 2p \qquad P(G|Z > s) = \frac{q\Phi(-s + 1.40)}{q\Phi(-s + 1.40) + p\Phi(-s + 2)}$$

**4.** Data la distribuzione
$$f(x|\theta) = \begin{cases} \theta & \text{se } x = 1 \\ 1 - \theta & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
con $0 \le \theta \le 1$, ed un campione $x = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$ da essa estratto, si assegni a $\theta$ distribuzione iniziale $\beta(\theta) = B_{1,1}(\theta)$. Determinare la distribuzione finale $\beta(\theta|x)$.

$$\beta(\theta|x) = B_{5,7}(\theta)$$

**5.** Siano $x_1, x_2$ due punti scelti a caso in $[-3, -1]$. Fissato $x \in [-2, -1]$ calcolare la probabilità $\alpha$ che almeno uno dei due punti appartenga a $[-3, x]$.
Calcolare inoltre la previsione $\mu$ di $Y = 2(X_{(2)} - X_{(1)})$.

$$\alpha = 1 - \left(\frac{1 + x}{2}\right)^2 \qquad \mu = \frac{4}{3}$$

**6** Si determini la funzione caratteristica del numero aleatorio $Z = 2(X - Y)$, essendo $(X, Y)$ un vettore aleatorio, che assume le coppie di valori
$$\{(0, 0), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 2), (1, 3)\}$$
con uguale probabilità.

$$\phi_Z(t) = \frac{1}{6}\left(1 + e^{2it} + e^{-2it} + 2e^{-4it} + e^{-6it}\right)$$

**CALCOLO DELLE PROBABILITÀ : 14 giugno 2001**
**nuovo ord., nn.1–4, vecchio ord., nn. 1–6**
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

**1.** Sia $A \vee B \subseteq E$. Quanto deve valere $P(E)$ affinché si abbia $P[(A^c \wedge B^c)|E] = P(A \vee B)$, sapendo che $A$ e $B$ sono stocasticamente indipendenti e $P(A) = P(B) = \frac{1}{4}$.

$$\boxed{P(E) = \frac{7}{9}}$$

**2.** Sia $X$ un numero aleatorio con densità

$$f(x) = \begin{cases} 12x(1-x)^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare la previsione e la funzione di ripartizione di $X$.

$$\mathbb{P}(X) = \frac{2}{5} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 6x^2 - 8x^3 + 3x^4, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

**3.** Sia $f(x,y) = k(x+y)$, per $(x,y) \in \mathcal{C} = \{(x,y) : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2-x\}$, e $f(x,y) = 0$ altrove, la densità congiunta di un vettore aleatorio continuo $(X,Y)$. Calcolare la costante $k$ e, dati gli eventi $A = (X \le 1, Y > 1), B = (X > 1, Y \le 1)$, stabilire se $A$ e $B$ sono equiprobabili. Calcolare la funzione di ripartizione $F_1(x)$ di $X$.

$$k = \frac{3}{8} \qquad \textit{Equiprob.?}\ \text{SÌ},\ \frac{5}{16} \qquad F_1(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x(12-x^2)}{16}, & 0 \le x \le 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

**4.** Una ditta vende lampadine, il 20 % proveniente da una fabbrica $A$, il 50 % da una fabbrica $B$ e il 30 % da $C$. Le percentuali di lampadine difettose prodotte da $A, B, C$ sono rispettivamente il 4 %, il 2 % e il 3 %. Calcolare la probabilità $\alpha$ che una lampadina venduta dalla ditta sia difettosa e la probabilità $\beta$ che una lampadina risultata difettosa sia stata prodotta da $C$.

$$\alpha = 0.027 \qquad \beta = \frac{1}{3}$$

**5.** Dare un esempio di famiglia di eventi scambiabili che non siano stocasticamente indipendenti.

$E_i$= "pallina bianca all'$i$-esima estrazione" (estrazioni **senza** restituzione)

**6.** Dati due processi di Poisson di intensità $\lambda_1, \lambda_2$, siano $X_1, X_2$ il numero di arrivi di ciascun processo in $[0,2]$ ed $Y_1, Y_2$ il numero di arrivi di ciascun processo in $[3,6]$. Calcolare le probabilità $p_i$ (i=1,2) degli eventi condizionati $(X_i = 1)|(X_i + Y_i = 3)$.

$$p_1 = 3\,\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2 \qquad p_2 = p_1$$

**CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 20 luglio 2001**

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

| | | |
|---|---|---|
| Corso intero (V.O.) | esercizi | 1-6 |
| Elettronica ($1^o$ Mod.),Informatica (Canali 1–4) | esercizi | 1-4 |

**1.** Siano $A, B, C$ tre eventi tali che $A \wedge B \wedge C = \emptyset$ e $A \vee B \vee C = \Omega$ e siano assegnate le seguenti valutazioni di probabilità: $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(C) = \frac{1}{2}$. Stabilire se l'assegnazione di probabilità è coerente.

coerente ? SÌ

**2.** Dati due eventi $A$, $B$ tali che $P(A) = 1/2$, $P(B|A) = 1/4$, $P(A|B) = 1/5$, stabilire se ognuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa:

| | | |
|---|---|---|
| (i) | gli eventi $A, B$ sono incompatibili | F |
| (ii) | $A$ implica $B$ | F |
| (iii) | $P(A^c|B^c) = 0$ | V |
| (iv) | $P(A|B) + P(A|B^c) = 1$ | F |

**3.** Dato il vettore aleatorio $(X, Y)$ con distribuzione normale

$$f(x,y) = \frac{1}{6\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}\left[\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)\left(\frac{y-5}{3}\right) + \left(\frac{y-5}{3}\right)^2\right]} \quad (x,y) \in I\!R^2,$$

scrivere la densità marginale $f_1(x)$ di $X$. Calcolare la probabilità $p$ dell'evento $(-3 \leq X \leq 5)$ e l'equazione della retta di regressione di $Y$ su $X$.

$f_1(x) = N_{1,2}(x)$ $\qquad p = 2\Phi(2) - 1$ $\qquad y = 5 + \frac{3}{4}(x-1)$

**4.** Un tecnico è chiamato da una ditta per intervenire su un macchinario $A$ che produce 1 pezzo difettoso su 5, mentre altri tre macchinari identici producono solo 1 pezzo difettoso su 100. Il tecnico entra nella ditta, sceglie un macchinario a caso tra i 4 identici, osserva un pezzo a caso prodotto dal macchinario, che risulta essere difettoso. Qual è la probabilità $p$ che abbia scelto il macchinario $A$?

$p = \frac{20}{23}$

**5.** Dati $X_1, X_2, X_3, X_4$ numeri aleatori indipendenti e con distribuzione uniforme sull'intervallo $[0, 2]$, calcolare la densità di probabilità e la previsione del numero aleatorio $Y = 3 - X_{(4)}$.

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(3-y)^3 & y \in [1,3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad I\!P(Y) = \frac{7}{5}$$

**6.** Dato un vettore aleatorio discreto $(X, Y)$ con distribuzione uniforme sul codominio $\{(0,0), (0,2), (2,2), (2,0)\}$, calcolare la funzione generatrice $f(t)$ del numero aleatorio $Z = (X+Y)$.

$f(t) = \frac{1}{4}(1 + t^2)^2$

**CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (Civili, Inf.FR, Nettuno) - 20 luglio 2001**
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

**1.** Siano $A, B, C$ tre eventi a due a due incompatibili e siano assegnate le seguenti valutazioni di probabilità: $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(C) = \frac{1}{2}$. Stabilire se tale assegnazione è coerente.

$$\boxed{\text{coerente ? NO}}$$

**2.** Dati due eventi $A$, $B$ tali che $P(A) = 1/2$, $P(B|A) = 1/4$, $P(A|B) = 1/5$, stabilire se ognuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa:

| | | |
|---|---|---|
| (i) | gli eventi $A, B$ sono incompatibili | F |
| (ii) | $A$ implica $B$ | F |
| (iii) | $P(A^c|B^c) = 0$ | V |
| (iv) | $P(A|B) + P(A|B^c) = 1$ | F |

**3.** Il numero aleatorio $X$ ha distribuzione

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-1}{2})^2}, \ x \in I\!R.$$

Calcolare la probabilità $p$ dell'evento $(-3 \leq X \leq 5)$.

$$\boxed{p = 2\Phi(2) - 1}$$

**4.** Un tecnico è chiamato da una ditta per intervenire su un macchinario $A$ che produce 1 pezzo difettoso su 5, mentre altri tre macchinari identici producono solo 1 pezzo difettoso su 100. Il tecnico entra nella ditta, sceglie un macchinario a caso tra i 4 identici, osserva un pezzo a caso prodotto dal macchinario, che risulta essere difettoso. Qual è la probabilità $p$ che abbia scelto il macchinario $A$?

$$\boxed{p = \frac{20}{23}}$$

**CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 13 settembre 2001**

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

| | | |
|---|---|---|
| Corso intero (V.O.) | esercizi | 1-6 |
| Elettronica ($1^o$ Mod.),Informatica (Canali 1–4), Informatica (Frosinone), Nettuno | esercizi | 1-4 |
| Civile | esercizi | 1-3 |

**1.** Siano $A, B, C$ tre eventi tali che $A \vee B \vee C = \Omega$, con probabilità rispettivamente $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{6}$, $P(C) = \frac{1}{2}$. Stabilire se l'assegnazione di probabilità è coerente.

coerente ? NO

**2.** La quantità di rifiuti solidi smaltiti da un'industria in ciascuna giornata è un numero aleatorio $X$ con densità della forma

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 \le x \le 1 \\ h(2-x) & 1 < x \le 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Sapendo che $P(X \le \frac{1}{2}) = \frac{1}{24}$, determinare le costanti $h$ e $k$. Calcolare la previsione di $X$.

$h = \frac{4}{3}$ $\qquad k = 1$ $\qquad \mathbb{P}(X) = \frac{41}{36}$

**3.** Siano $X$ e $Y$ due numeri aleatori indipendenti aventi entrambi distribuzione esponenziale con lo stesso parametro $\lambda$. Determinare la covarianza cov$(X, Y)$ e, considerato $U = X - Y$, determinare la previsione $\mathbb{P}(U)$, la varianza var$(U)$, la probabilità $P(U > 0)$.

$\mathbb{P}(U) = 0$ $\qquad$ cov$(X, Y) = 0$ $\qquad$ var$(U) = \frac{2}{\lambda^2}$ $\qquad P(U > 0) = \frac{1}{2}$

**4.** Un numero aleatorio $X$ non negativo ha funzione di sopravvivenza $S(x) = e^{-(ax + \frac{bx^2}{2})}$, per $x \ge 0$. Calcolare, per ogni $x > 0$, la densità $f(x)$, determinando l'insieme $I$ dei valori da assegnare alle costanti $a$ e $b$. Inoltre, stabilire per quali valori di $a$ e $b$ è soddisfatta la condizione
$P(X > x + y | X > y) = P(X > x), \ \forall x > 0, y > 0.$

$f(x) = (a + bx)e^{-(ax + \frac{bx^2}{2})}, \ x > 0$ $\qquad I = \{(a, b) \ : a \ge 0, b \ge 0\} \setminus (0, 0)$ $\qquad a > 0, \quad b = 0$

**5.** Un centralino riceve delle telefonate secondo un processo di Poisson $N(t)$ di intensità $\mu$. Qual è la distribuzione del tempo $Y$ tra due telefonate successive e quella del numero aleatorio $Z = 2\mu Y$ ?

$f_Y(y) = \mu e^{-\mu y}, \ y > 0$ $\qquad f_Z(z) = \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{2}}, \ z > 0$

**6.** Sia $(X, Y)$ un vettore aleatorio bidimensionale di densità

$$f(x, y) = \begin{cases} \lambda y e^{-y(x+\lambda)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

ove $\lambda$ è un parametro positivo. Determinare se $X$ ed $Y$ sono scambiabili e calcolare la densità di $X|\{Y = y\}$.

$X, Y$ SCAMBIABILI ? NO

$$f_{X|y}(x) = \begin{cases} ye^{-yx} & x > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

**CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 27 ottobre 2001**
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
**Corso intero:** nn.1 – 6, **Elettronica** $1^o$ **Mod.:** nn.1 – 4, **Nettuno:** 1–4.

**1.** Siano $A, B, C$ tre eventi tali che $B \subseteq A \wedge C^c$. L'assegnazione $P(A) = 0.9$, $P(B) = 0.8$, $P(C) = 0.3$ è coerente? $\boxed{\text{NO}}$
Gli eventi $A$ e $C$ sono stocasticamente indipendenti ? $\boxed{\text{Non esiste una } P}$

**2.** Sia $(X, Y)$ un vettore aleatorio bidimensionale con densità ($\lambda > 0$)

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y} & 0 \leq x \leq y \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Determinare le densità marginali $f_X$, $f_Y$; la densità condizionata di $X$, dato $Y = y$.

$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \lambda^2 y e^{-\lambda y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases} \qquad f_X(x|y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y} & 0 < x < y \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}}$$

**3.** Un urna contiene 12 palline di cui 3 bianche, 5 nere e le restanti rosse. Si estraggono 3 palline senza restituzione, quale è la probabilità $p$ che si estraggano 2 palline bianche e 1 rossa?

$$\boxed{p = \frac{3}{55}}$$

**4.** Un canale di trasmissione trasmette segnali binari $\{0, 1\}$. A causa del rumore, possono esservi errori: siano $0.9$ e $0.8$, rispettivamente, le probabilità $P(r_0|t_0)$, $P(r_1|t_1)$ che un segnale trasmesso come 0 e come 1 sia ricevuto correttamente. Se la probabilità $P(t_0)$ di trasmettere 0 è 0.4, trovare: la probabilità $\alpha$ che un segnale trasmesso sia ricevuto come 1; la probabilità $\beta$ che sia stato trasmesso 1, supposto che venga ricevuto 1; la probabilità $\gamma$ totale di "errore", cioè dell' evento "trasmetto 0 AND ricevo 1" OR "trasmetto 1 AND ricevo 0".

$$\boxed{\alpha = \frac{13}{25} \qquad \beta = \frac{12}{13} \qquad \gamma = \frac{4}{25}}$$

**5.** Sia $(X, Y)$ il vettore aleatorio dell' esercizio 2.

I numeri aleatori $X$ ed $Y$ sono scambiabili? $\boxed{\text{NO}}$

**6.** La durata $X_k$ delle telefonate che arrivano ad un centralino ha distribuzione esponenziale di parametro $\lambda$, ed è indipendente dal numero di chiamate che arrivano in $[0, t)$. Se il tempo di attesa $Y_k$ fino alla chiamata $k$-esima è una gamma $G_{k,\alpha}(y)$, con $\alpha = 2\lambda$, quale è la probabilità $p$ che al tempo $t$ la prima telefonata sia ancora in corso, supposto che essa sia arrivata in $[0, t)$?

$$\boxed{p = \frac{2e^{-\lambda t}}{1 + e^{-\lambda t}}}$$