CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA - 10 gennaio 2002
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Informatica (N.O.) (Canali 1–4) esercizi 1-4
Vecchio Ordinamento esercizi 1-6

1. Da un lotto contenente 4 pezzi buoni e 2 difettosi si estraggono senza restituzione 3 pezzi. Sia X il numero aleatorio di pezzi buoni estratti. Sia inoltre E_i l'evento *"l'i-mo pezzo estratto è buono"*. Calcolare la varianza di X e la probabilità α dell'evento condizionato $E_1 \wedge E_3 | E_1 \vee E_3$.

$$\boxed{\mathrm{var}(X) = \frac{2}{5} \qquad \alpha = \frac{3}{7}}$$

2. Siano X e Y due numeri aleatori indipendenti aventi entrambi distribuzione normale con parametri m ($\neq 0$), σ. Considerati i numeri aleatori $U = X - Y, V = X + Y, Z = aX + bY$, calcolare la covarianza di U, V e i valori di a e b tali che Z abbia distribuzione normale standard.

$$\boxed{\mathrm{cov}(U, V) = 0 \qquad a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \qquad b = \mp\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}}$$

3. La lunghezza di una barra è un numero aleatorio X con densità della forma

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq a \\ 2a - x & a < x \leq 2a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare la costante a e la funzione di ripartizione di X.

$$\boxed{a = 1 \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{2} & , \ 0 < x \leq 1 \\ 2x - 1 - \dfrac{x^2}{2} & , \ 1 < x \leq 2 \\ 1 & , \ x > 2 \end{cases}}$$

4. Un lotto è costituito da 50 componenti, dei quali 20 sono stati costruiti da una macchina M_1 e 30 da una macchina M_2. Il generico componente risulta difettoso con probabilità $\frac{1}{4}$ se prodotto da M_1 e con probabilità p se prodotto da M_2. Dal lotto viene estratto a caso un componente e viene esaminato. Calcolare, in funzione di p, la probabilità α dell'evento $E =$ *"Il pezzo esaminato risulta non difettoso"* e la probabilità β dell'evento condizionato $H|E$, essendo H l'evento *"Il pezzo esaminato è stato prodotto dalla macchina M_1"*. Infine, calcolare il valore di p, tale che E ed H risultano stocasticamente indipendenti.

$$\boxed{\alpha = \frac{9}{10} - \frac{3}{5}p \qquad \beta = \frac{1}{3 - 2p} \qquad p = \frac{1}{4}}$$

5. Un circuito elettronico è dotato di n chip le cui durate sono variabili aleatorie stocasticamenente indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro 2. Il circuito elettronico funziona se almeno uno dei chip funziona. Determinare il numero minimo k di chip necessari affinchè la probabilità p che il circuito elettronico duri più di 2 anni sia almeno del 95%.

$$\boxed{k = \left[\frac{\ln 0.05}{\ln(1 - e^{-4})}\right] + 1 = 163}$$

6. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con distribuzione $f(x, y) = \dfrac{e^{-x-y}}{1 - 2e^{-1}}$ nel triangolo di vertici $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ e 0 altrove . Stabilire se X ed Y sono scambiabili e/o stocasticamente indipendenti.

X e Y sono scambiabili? SÌ NO

X e Y sono stocasticamente indipendenti? SÌ NO

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 21 gennaio 2002
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Vecchio Ordinamento: 1–6, Elettronica 1^o mod, Nettuno: 1–4, Civile: 2–4.

1. Siano A e B due eventi tali che $P(A) = 2/5$ e $P(A \vee B) = 3/5$. Determinare i valori di probabilità coerenti di B e stabilire se esiste e quale sia il valore p per $P(B)$ che renda A e B stocasticamente indipendenti.

$$P(B) \in \left[\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right] \qquad p = \frac{1}{3}$$

2. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con distribuzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare le densità marginali di X e Y e determinare se X ed Y sono indipendenti.

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} -\ln y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

X ed Y sono stocasticamente indipendenti? SÌ NO

3. Il campione casuale $x = (1.5, 3, 1, 2.5)$ proviene da una distribuzione normale di media incognita θ e varianza uguale a 4. Supposto che Θ abbia distribuzione iniziale normale con media 0 e varianza uguale a 1, determinare la distribuzione di $\Theta|x$.

$$\beta(\theta|x) = N_{1,1/\sqrt{2}}(\theta)$$

4. La resistenza di un circuito elettrico è una variabile aleatoria R con distribuzione uniforme tra 11 e 12 Ohm. Sia $M = \dfrac{1}{R}$ la conduttanza del circuito. Calcolare la previsione di R ed M, la covarianza di R e M. Determinare la distribuzione di M.

$$\mathbb{P}(R) = 11.5 \qquad \mathbb{P}(M) = \ln\frac{12}{11} \qquad \text{cov}(R, M) = 1 - 11.5\ln\frac{12}{11}$$

$$f_M(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & \dfrac{1}{12} \le x \le \dfrac{1}{11} \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

5. Il numero di disintegrazioni di una sostanza radioattiva al variare del tempo è un processo di Poisson $N(t)$ di intensità μ. Trovare la media e la varianza di $N(\tau)$, per un tempo τ assegnato. Determinare la distribuzione del tempo di attesa della prima disintegrazione T.

$$\mathbb{P}(N(\tau)) = \mu\tau \qquad \text{var}(N(\tau)) = \mu\tau \qquad f_T(t) = \mu e^{-\mu t}$$

6. Si considerino due materiali U^{235} e Pu^{239} che, indipendentemente, decadono seguendo due diversi processi di Poisson $N_1(x)$ e $N_2(x)$ (con intensità μ_1 e μ_2, rispettivamente). Come è distribuito il numero totale di disintegrazioni $N_1(x) + N_2(x)$? (Suggerimento: usare le funzioni caratteristiche)

$$P(N_1(x) + N_2(x) = n) = \frac{(\mu_1 x + \mu_2 x)^n}{n!} e^{-(\mu_1 x + \mu_2 x)}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 14 febbraio 2002
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
V.O.: 1–6 ; Elettronica 1^o **mod., Nettuno: 1–4.**

1. Siano A, B, C tre eventi tali che $B \vee C \subset A$. Stabilire se la seguente assegnazione di probabilità è coerente: $P(A^c) = 0.3, P(B) = 0.7, P(C) = 0.6$.

Coerente?	SÌ	NO

2. Si lancia un dado tre volte senza guardare gli esiti. Determinare la probabilità p che si ottengano tre "1", nell' ipotesi che si siano ottenuti almeno due "1".

$$\boxed{p = \frac{1}{16}}$$

3. - Sia (X, Y) un vettore aleatorio bidimensionale con densità

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & \text{se } x^2 + y^2 \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Determinare (usando <u>solo</u> proprietà elementari di logaritmi e disuguaglianze) la funzione di ripartizione e la densità del numero aleatorio $Z = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right)$.

$$F(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 1 - e^{-2z} & z > 0 \end{cases} \qquad f(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 2e^{-2z} & z > 0 \end{cases}$$

4. La durata X di un componente elettronico segue una distribuzione esponenziale con durata media 8 mesi. Determinare la probabilità p che un componente duri più di 9 mesi, supposto che esso sia in funzione da 4 mesi.

$$\boxed{p = e^{-5/8}}$$

5. Un centralino d'emergenza, attivo 24 ore al giorno, riceve in media una chiamata all'ora. Determinare la probabilità p_1 che al centralino arrivino più di 3 chiamate in 3 ore, e la probabilità p_2 che passino più di due ore tra due chiamate successive.
(N.B. Si supponga che il tempo d'attesa tra due chiamate successive abbia distribuzione esponenziale.)

$$p_1 = 1 - 13e^{-3} \qquad p_2 = e^{-2}$$

6. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con distribuzione uniforme sul triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$. Stabilire se i numeri aleatori X ed Y sono scambiabili.

X e Y scambiabili?	SÌ	NO

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 22 marzo 2002
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Ingegneria Clinica

1. Siano U e V due urne contenenti rispettivamente 3 palline bianche e 2 nere e 6 palline bianche e 5 nere. Dopo aver estratto (senza guardarla) una pallina dall'urna U e averla immessa nell'urna V, viene estratta una pallina dall'urna V. Considerati gli eventi E= "la pallina estratta dall'urna U è bianca" e F= "la pallina estratta dall'urna V è bianca", si calcoli $P(F)$, $P(E|F)$ e si riconosca se E ed F sono stocasticamente indipendenti.

$P(F) = \dfrac{11}{20}$	$P(E\|F) = \dfrac{7}{11}$	Indipendenti	SÌ	NO

2. Si considerino gli eventi A = "X ha meno di 10 anni", B = "X è figlio unico", C= "X ha almeno un fratello", D= "X ha due fratelli" . Si riconosca se l' asssegnazione $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$, $P(D) = 1/4$ è coerente .

Coerente	SÌ	NO

3. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} k(2+xy)\ , & (x,y) \in A \\ 0\ , & \text{altrove} \end{cases}$$

essendo A il rettangolo di vertici $(0,0), (2,0), (0,1), (2,1)$. Determinare la costante k e, per ogni $x \in [0,2]$ fissato, la densità condizionata marginale di $Y|x$.

$$k = \frac{1}{5} \qquad f_Y(y|x) = \begin{cases} \dfrac{4+2xy}{4+x} & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

4. Dato un numero aleatorio X con funzione di ripartizione

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1/8 & -1 \le x < 3 \\ 1/4 & 3 \le x < 8 \\ 1 & x \ge 8 \end{cases}$$

determinare il codominio C_X e calcolare la probabilità dei seguenti eventi
$\{X = 8\}$, $\{X = 9\}$, $\{X > 80\}$, $\{2 < X \le 5\}$.

$$C_X = \{-1, 3, 8\}$$

$$P(X = 8) = \frac{3}{4} \qquad P(X = 9) = 0 \qquad P(X > 80) = 0 \qquad P(2 < X \le 5) = \frac{1}{8}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 12 aprile 2002
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Ingegneria Clinica:1–4; Nettuno:1–4; Vecchio ordinamento:1–6.

1. I costituenti relativi agli eventi A_1, A_2, A_3 sono i seguenti $C_1 = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$, $C_2 = A_1^c \wedge A_2 \wedge A_3$, $C_3 = A_1 \wedge A_2^c \wedge A_3$, $C_4 = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3^c$, $C_5 = A_1^c \wedge A_2^c \wedge A_3$. Verificare se la valutazione di probabilità $P(A_1) = \frac{4}{5}, P(A_2) = \frac{7}{10}, P(A_3) = \frac{1}{2}$ è coerente e calcolare la probabilità di C_4.

Coerente ?	SÌ	NO	$P(C_4) = \frac{1}{2}$

2. Dato il vettore aleatorio (X, Y) con distribuzione uniforme in $\mathcal{C} = [0, 1] \times [0, 2]$, calcolare le funzioni di ripartizione $F_X(x)$ ed $F_Y(y)$ e le probabilità $P(Y - X > 1)$ e $P(3X - Y < 0)$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0\,, & x \leq 0 \\ x\,, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1\,, & x \geq 1 \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0\,, & y \leq 0 \\ \frac{y}{2}\,, & 0 \leq y \leq 2 \\ 1 & , y \geq 2 \end{cases}$$

$P(Y - X > 1) = \frac{1}{4}$	$P(3X - Y < 0) = \frac{1}{3}$

3. Il tempo di attesa fino al primo guasto di un macchinario è un numero aleatorio X, con tasso di avaria $h(x) = 6x + 1$. Determinare la funzione di ripartizione $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-3x^2 - x} & x \geq 0 \end{cases}$$

4. Dati due lotti, il primo dei quali contiene 3 pezzi buoni e 4 difettosi, il secondo 3 buoni e 2 difettosi, si estrae a caso un pezzo da ciascun lotto; calcolare la previsione e la varianza del numero aleatorio X="numero di pezzi buoni ottenuti nelle due estrazioni".

$\mathbb{P}(X) = \frac{36}{35}$	$\text{var}(X) = \frac{594}{1225}$

5. Dato un processo di Poisson di intensità 4, sia X il numero di arrivi in $[0, 2]$ e Y il numero di arrivi in $(2, 3]$. Calcolare la probabilità dell'evento condizionato $E|H$, con $E = (X = 3)$, $H = (X + Y = 5)$.

$$P(E|H) = \frac{80}{243}$$

6. Contrassegnare le affermazioni seguenti con V o F a seconda che siano vere o false:

- Data una successione di eventi equiprobabili, il numero di prove da effettuare per ottenere k successi ha sempre distribuzione di Pascal — F
- Eventi equiprobabili sono sempre indipendenti — F
- Eventi incompatibili sono sempre scambiabili — F
- Eventi indipendenti e scambiabili sono sempre equiprobabili — V
- le distribuzioni marginali del vettore (X, Y) si possono determinare a partire dalla distribuzione congiunta se X e Y sono indipendenti — V

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA - 24 giugno 2002
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Informatica (Canali $1-4$); Gestionale (Canali $1-2$) esercizi 1-4.
Clinica esercizi 2-4.

Nome e cognome**:**

1. La probabilità che uno studente scelto a caso tra gli iscritti al I anno di Ingegneria dopo la prima sessione non abbia ancora superato l'esame di Analisi è 0.7, la probabilità che abbia fatto il liceo scientifico ed abbia superato l'esame di Analisi è 0.2. Quali valori può assumere la probabilità p che abbia fatto il liceo classico ed abbia superato Analisi ?

$$\boxed{p \in [0, 0.1]}$$

2. La densità di probabilità di un numero aleatorio X è data da $f(x) = kx^2$, $(-1 \leq x \leq 1)$, e $f(x) = 0$ altrove. Calcolare: la costante k; la funzione di ripartizione $F(x)$; la densità di probabilità $g(y)$ del numero aleatorio $Y = 2X$.

$$k = \frac{3}{2} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1, \\ \frac{1}{2}(x^3+1) & \text{se } -1 \leq x < 1, \\ 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases} \qquad g(y) = \begin{cases} \frac{3}{16}y^2 & -2 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

3. Tre palline numerate da 1 a 3 vengono inserite a caso in due scatole s_1, s_2. Sia X il numero di palline in s_1 e Y il numero di palline con numero dispari in s_1. Determinare se X ed Y sono stocasticamente indipendenti. Calcolare $\mathbb{P}(X)$, $\mathrm{cov}(X, Y)$.
(Suggerimento: sia E_i l'evento "la pallina con il numero i viene inserita nella scatola s_1 - per $i = 1, 2, 3$)

X e Y sono stocasticamente indipendenti? | SÌ | NO |

$$\mathbb{P}(X) = \frac{3}{2} \qquad \mathrm{cov}(X, Y) = \frac{1}{2}$$

4. Data la funzione di ripartizione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{4}{5} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

del numero aleatorio X, determinare il codominio C_X di X e la probabilità dei seguenti eventi $E = \left(\frac{4}{5} \leq X \leq \frac{9}{4}\right)$, $H = \left(\frac{3}{2} \leq X \leq 3\right)$ e dell'evento condizionato $E|H$.

$$C_X = \{0, 1, 2, 3\} \quad ; \; P(E) = \frac{11}{20} \quad ; \; P(H) = \frac{1}{2} \quad ; \; P(E|H) = \frac{3}{5}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 9 luglio 2002
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Civile, Nettuno

1. Da un lotto contenente 2 fusibili difettosi e 8 buoni si estraggono senza restituzione 4 pezzi. Sia E_i = "l' i-esimo pezzo estratto è difettoso" e posto $X = \sum_{i=1}^{4} |E_i|$, calcolare la probabilità $p_x = P(X = x)$ per ogni x, la varianza di X e la probabilità α dell'evento condizionato $E_3|E_1$.

$$p_x = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = 0 \\ \frac{8}{15} & x = 1 \\ \frac{2}{15} & x = 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad \text{var}(X) = \frac{32}{75} \qquad \alpha = \frac{1}{9}$$

2. La densità di probabilità di un numero aleatorio X è data da

$$f(x) = \begin{cases} k\frac{1}{x}\,, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0\,, & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare: la costante k; la funzione di ripartizione $F(x)$; la densità di probabilità $g(y)$ del numero aleatorio $Y = e^X$.

$$k = (\ln 3)^{-1} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ (\ln 3)^{-1} \ln x & 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases} \qquad g(y) = \begin{cases} 0 & y < e \\ \frac{1}{y(\ln 3)(\ln y)} & e \leq y \leq e^3 \\ 0 & y > e^3 \end{cases}$$

3. Una impresa ha installato un sistema automatico per il controllo di qualità. La probabilità che un pezzo sia difettoso è 0.2. Il sistema di controllo garantisce che, supposto che il pezzo sia difettoso, la probabilità che esso venga scartato è 0.9; mentre la probabilità che un pezzo non difettoso venga scartato è 0.01, si calcoli la probabilità che un pezzo non scartato dal sistema sia difettoso.

$$\boxed{p = \frac{5}{203}}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 22 luglio 2002
Informatica (canali 1-4), Gestionale (canali 1-2), Elettronica 1 Mod.
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. In base a un indagine sanitaria condotta su una fabbrica di carta viene valutata pari a 0.1 la probabilità dell'evento E, che una persona che vi lavora da almeno 5 anni soffra di disturbi polmonari, 0.15 la probabilità dell'evento H che soffra di cefalea, e 0.8 la probabilità dell'evento S che sia sana.

È coerente tale assegnazione ? | SÌ NO

Gli eventi E ed H sono stocasticamente indipendenti ? | SÌ NO

2. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è la funzione $f(x, y) = 6e^{-(2x+3y)}$, per $x \geq 0,\ y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare, per ogni $x > 0, y > 0$, la probabilità $p = P(X > x + y|X > x)$ e stabilire se X ed Y sono stocasticamente indipendenti. Infine, determinare l'equazione della retta di regressione di Y su X.

$p = e^{-2y}$	Stocasticamente indipendenti?	SÌ	NO	$y = \frac{1}{3}$

3. L'insieme dei valori possibili di un numero aleatorio discreto X è $\mathcal{C} = \{0, 1, \ldots, 8\}$, con

$$P(X = x) = \binom{8}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{8-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, 8.$$

Calcolare: la funzione caratteristica $\phi_X(t)$; la previsione m di X; la probabilità dell'evento $(X \leq 6)$.

$\phi_X(t) = \left(\frac{1}{3}e^{it} + \frac{2}{3}\right)^8$	$m = \frac{8}{3}$	$P(X \leq 6) = 1 - \frac{17}{3^8}$

4. Sia $h_X(x) = (x - 2)^2$ per $x > 0$ il tasso di mortalità di una specie animale: si determini la corrispondente densità di probabilità, e stabilire se il corrispondente fenomeno è senza usura.

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 e^{-\frac{(x-2)^3+8}{3}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Il fenomeno è senza usura? | SÌ NO

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ- 22 luglio 2002
Ingegneria Clinica
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. In base a un indagine sanitaria condotta su una fabbrica di carta viene valutata pari a 0.1 la probabilità dell'evento E, che una persona che vi lavora da almeno 5 anni soffra di disturbi polmonari, 0.15 la probabilità dell'evento H che soffra di cefalea, e 0.8 la probabilità dell'evento S che sia sana.

È coerente tale assegnazione ? | SÌ | NO |

Gli eventi E ed H sono stocasticamente indipendenti ? | SÌ | NO |

2. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è la funzione $f(x, y) = 6e^{-(2x+3y)}$, per $x \geq 0,\ y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare, per ogni $x > 0, y > 0$, la probabilità $p = P(X > x + y|X > x)$ e stabilire se X ed Y sono stocasticamente indipendenti. Infine, determinare l'equazione della retta di regressione di Y su X.

| $p = e^{-2y}$ | Stocasticamente indipendenti ? | SÌ | NO | $y = \frac{1}{3}$ |

3. L'insieme dei valori possibili di un numero aleatorio discreto X è $\mathcal{C} = \{0, 1, \ldots, 8\}$, con

$$P(X = x) \ = \ \binom{8}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \left(\frac{2}{3}\right)^{8-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, 8.$$

Calcolare: la previsione m di $X;$ la probabilità dell'evento $(X \leq 6)$.

| $m = \frac{8}{3}$ | $P(X \leq 6) = 1 - \frac{17}{3^8}$ |

4. Sia $h_X(x) = (x - 2)^2$ per $x > 0$ il tasso di mortalità di una specie animale: si determini la corrispondente densità di probabilità, e stabilire se il corrispondente fenomeno è senza usura.

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 e^{-\dfrac{(x-2)^3+8}{3}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Il fenomeno è senza usura ? | SÌ | NO |

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 6 novembre 2002
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati.
Vecchio Ordinamento: $1-6$**; Elettronica** 1^o **Mod.:**$1-4$**; Nettuno:** $1-3$.

1. Date due urne U, V contenenti entrambe 100 palline, ognuna bianca o nera, siano $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{10}$ le rispettive proporzioni di palline bianche. Si sceglie "a caso" una delle due urne e da essa si estraggono due palline senza restituzione. Calcolare la probabilità dell'evento
E="le due palline sono entrambe nere".

$$\boxed{P(E) = \frac{19}{66}}$$

2. Per un vettore aleatorio discreto (X,Y) si ha $P(X=x, Y=y) > 0$ nei punti
$(0,0), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)$, ed i corrispondenti eventi hanno tutti probabilità $\frac{1}{5}$.
Calcolare $P(X \geq 1 | X \neq Y)$, cov$(X, 7Y)$, var$(X - \pi Y)$.

$$\boxed{P(X \geq 1 | X \neq Y) = 1\ ; \qquad \text{cov}(X,7Y) = \frac{63}{25}\ ; \qquad \text{var}(X - \pi Y) = \frac{14}{25}(\pi^2+1) - \frac{18}{25}\pi}$$

3. Sia $h(x) = \mu + \beta x^4$: determinare i valori di μ e β per i quali $h(x)$ è un tasso di avaria, e la funzione di ripartizione del numero aleatorio X che rappresenta la durata del sistema.

$$\boxed{(\mu,\beta) \in I\!R_o^+ \times I\!R_o^+ \setminus \{(0,0)\}}$$

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - \exp^{-(\mu x + \beta \frac{x^5}{5})} & x > 0 \end{cases}}$$

4. La probabilità che una certa moneta sia truccata con due C (sia H questo evento) viene valutata uguale a β. Dopo 4 lanci in cui si ottiene sempre C (sia E questo evento), viene attribuita probabilità condizionata $\frac{1}{3}$ ad $H|E$. Dedurne il valore della valutazione iniziale β.

$$\boxed{\beta = \frac{1}{33}}$$

5. Siano A, B, C tre eventi tali che $A \wedge B \wedge C = \emptyset$; data l'assegnazione $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ stabilire se esiste una P che renda i tre eventi scambiabili, e in caso affermativo determinare quali valori può assumere la probabilità dell'evento $(A \vee B) \wedge C$.

A, B, C scambiabili ? SÌ NO

$$\boxed{\frac{1}{3} \leq P((A \vee B) \wedge C) \leq \frac{1}{2}}$$

6. Una piccola industria riceve k ordini di un determinato prodotto; se il tempo X_i per produrre il pezzo i-esimo ($i = 1, ..., k$) ha distribuzione di Erlang di parametri (n, λ), determinare (supposto che le X_i siano indipendenti) la densità del numero aleatorio Z ="tempo per produrre tutti i k pezzi".

$$\boxed{f(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{kn}}{\Gamma(kn)} x^{kn-1} \exp^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}}$$