CALCOLO DELLE PROBABILITÀ 1^o **- 17 gennaio 2004**
Scrivere le risposte negli appositi spazi. Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Elettronica : 1–4; Nettuno: 1–3.

1. Data un'urna di composizione incognita con palline bianche e nere, sia $K =$ "il numero di palline bianche nell'urna è il doppio di quelle nere", con $P(K) = p \neq 1$. Si estrae una pallina, e sia $A =$"pallina bianca". Se $P(A|K^c) = \beta$, calcolare la probabilità di K nell'ipotesi A. Determinare poi β in modo tale che K ed A siano stocasticamente indipendenti.

$$\boxed{P(K|A) = \frac{2p}{2p + 3\beta(1-p)} \qquad \beta = \frac{2}{3}}$$

2. Il codominio di un vettore aleatorio (X, Y) costituito dalle coppie **equiprobabili** $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$. Determinare la funzione di ripartizione $F(z)$ di $Z = -2X + Y$.

$$\boxed{F(z) = \begin{cases} 0 & z < -3 \\ \frac{1}{5} & -3 \leq z < -2 \\ \frac{2}{5} & -2 \leq z < 0 \\ \frac{4}{5} & 0 \leq z < 3 \\ 1 & z \geq 3 \end{cases}}$$

3. Un vettore aleatorio (X, Y) ha distribuzione uniforme su un trapezio isoscele con base maggiore (sull'asse x) in $[0, 3]$ e con base minore e altezza di lunghezza 1. Calcolare le densità marginali e la probabilità di $E|H$, con $E = (Y - X > 0)$, $H = (X > 2)$.

$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}(3-x) & 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3-2y) & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad P(E|H) = 0}$$

4. In un controllo di qualità, si estrae (senza restituzione) un campione di $n = 20$ pezzi da un lotto che ne contiene $N = 100$ fra i quali 4 difettosi. Calcolare la probabilità di E="nel campione c'è al più un pezzo difettoso". Confrontare $P(E)$ con il valore ottenuto mediante l'approssimazione binomiale.

$$\boxed{P(E) = 0,822 \qquad P_a(E) = 0,81}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ 1^o **- 14 febbraio 2004**
Scrivere le risposte negli appositi spazi.
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Elettronica: 1–4; **Civile, Trasporti, Nettuno**: 1–3.

1. Due lotti contengono, entrambi, 36 pezzi funzionanti e 6 pezzi difettosi. Si estrae “a caso” un pezzo dal primo lotto e si mette nel secondo: calcolare cov(X, Y), essendo

X*=numero pezzi difettosi nel* I *lotto,* Y*=numero pezzi difettosi nel II lotto*.

$$\boxed{\text{cov}(X, Y) = -\frac{6}{49}}$$

2. Data la funzione di ripartizione del numero aleatorio Z

$$F(z) = \begin{cases} 0 & z < -4 \\ \frac{1}{5} & -4 \leq z < -2 \\ \frac{2}{5} & -2 \leq z < 0 \\ \frac{4}{5} & 0 \leq z < 2 \\ 1 & z \geq 2 \end{cases}$$

determinare il codominio di Z e la probabilità p dell’evento $-2 \leq Z < 1$, confrontando quest’ultima con $F(1) - F(-2)$.

$$\boxed{\mathcal{C}_Z = \{-4,\ -2,\ 0,\ 2\}; \qquad p = \frac{3}{5}; \qquad F(1) - F(-2) = \frac{2}{5}}$$

3. Un vettore aleatorio (X, Y) ha distribuzione uniforme sul parallelogramma di vertici $(0, 0), (1, 0)$, $(0, 1), (-1, 1)$. Calcolare le densità marginali f_X, f_Y e la probabilità dell’evento condizionato $A|B$, con $A = (Y - X > 0)$, $B = (X > 0)$.

$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad P(A|B) = \frac{1}{2}}$$

4. Dati due eventi E, H logicamente indipendenti, sia $P(E) = 0.4, P(H) = 0.5, P(E \vee H) = 0.6$. Stabilire se tale valutazione è coerente.

Coerente ? SÌ	NO

La ulteriore valutazione $P(E \wedge H) = 0.2$ mantiene la coerenza ?

SÌ	NO

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ 1^o **- 20 marzo 2004**
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Gestionale

1. L'architettura di un software è costituita da 3 moduli M_1, M_2, M_3. Sia A_i l'evento "il modulo M_i funziona". È noto che se M_1 funziona allora M_2 funziona, se M_2 funziona allora M_3 funziona. Determinare l'insieme $\mathcal{C}$ dei costituenti generati dagli eventi A_i con $i = 1, 2, 3$ (tenendo conto dei vincoli logici dati). Supposto che $P(A_1) = \frac{1}{4}, P(A_3) = \frac{3}{5}$, determinare i valori di probabilità coerenti p per A_2. Stabilire inoltre se A_1 e A_3 possono essere stocasticamente indipendenti.

$$\mathcal{C} = \{C_1 = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3\,;\ C_2 = A_1^c \wedge A_2 \wedge A_3\,;\ C_3 = A_1^c \wedge A_2^c \wedge A_3\,;\ C_4 = A_1^c \wedge A_2^c \wedge A_3^c\,\}$$

$p \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{5}\right]$ A_1, A_3 INDIPENDENTI? SÌ NO

2. Sia X il tempo aleatorio di durata di un dispositivo con densità

$$f(x) = \begin{cases} kxe^{-2x^2}, & \text{per } x > 0 \\ 0, & \text{per } x \leq 0. \end{cases}$$

Determinare la costante k e la probabilità γ dell'evento condizionato $(X > 2|X > 1)$.

$k = 4$ $\gamma = e^{-6}$

3. Dati due lotti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, ciascuno contenente 6 componenti buoni e 2 difettosi, da entrambi si effettuano 3 estrazioni con restituzione, ottenendo X pezzi difettosi fra quelli estratti da A ed Y pezzi difettosi fra quelli estratti da B. Considerato il numero aleatorio discreto $Z = X + Y$, calcolare: (i) la previsione m e la varianza σ^2 di Z; (ii) la funzione caratteristica $\phi_Z(t)$ di Z. (*Si noti che X e Y sono stocasticamente indipendenti*).

$m = \frac{3}{2}$ $\sigma^2 = \frac{9}{8}$ $\phi_Z(t) = \left(\frac{e^{it}}{4} + \frac{3}{4}\right)^6$

4. Un sistema S è costituito da due dispositivi D_1 e D_2 in parallelo funzionanti simultaneamente (e quindi S funziona finché almeno uno dei due dispositivi funziona). Siano X, Y, Z i tempi aleatori di durata di D_1, D_2 ed S, rispettivamente. La densità congiunta di (X, Y) è $f(x, y) = 6e^{-2x-3y}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la probabilità p che D_1 si guasti prima di D_2 e, per ogni $z \geq 0$, la funzione di ripartizione $F_Z(z)$ e la funzione di rischio $h_Z(z)$ di Z.

$$p = \frac{2}{5} \quad F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 - e^{-2z} - e^{-3z} + e^{-5z} & z \geq 0 \end{cases} \quad h_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 2 + \dfrac{e^{2z} - 3}{e^{3z} + e^{2z} - 1} & z \geq 0 \end{cases}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ 1^o **- 17 aprile 2004**
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Elettronica, Gestionale.

1. Siano A, B, C tre eventi tali che A e B siano incompatibili, inoltre $(A \vee B) \wedge C = \emptyset$. Determinare se la valutazione di probabilità $P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{12}, P(C) = \frac{1}{4}$ è coerente, e in caso affermativo calcolare i valori di probabilità coerenti p per l'evento $A^c \wedge B^c \wedge C^c$.

coerente?	SÌ	NO	p = 0

2. Una ditta riceve merce da tre fornitori A, B, C nelle seguenti proporzioni: il 42% della merce è fornita da A, il 14% da B, e la restante merce da C. È noto che la probabilità che un pezzo sia difettoso è, rispettivamente, 0.05, 0.04, 0.1, a seconda che sia fornito da A, B, C. Calcolare la probabilità α che un pezzo estratto da quelli ricevuti dalla ditta sia difettoso. Inoltre, esaminato un pezzo e supposto che sia difettoso, calcolare la probabilità p che esso provenga dal fornitore B.

$$\alpha = 0.0706 \qquad p = \frac{28}{353}$$

3. Dato l'insieme $\mathcal{C} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, sia $f(x, y) = x(y + 1)$, per $(x, y) \in \mathcal{C}$, con $f(x, y) = 0$ altrove, la densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y). Calcolare la probabilità p dell'evento $(X + Y \geq 0)$, le densità marginali e stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.

$$p = \frac{23}{24} \qquad f_X(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} \quad ; \quad f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{y+1}{2}, & y \in [-1, 1] \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

X, Y INDIPENDENTI?	SÌ	NO

4. Le funzioni caratteristiche di tre numeri aleatori X, Y, Z, con X e Y stocasticamente indipendenti, sono

$$\phi_X(t) = e^{(\sqrt{5}-1)it-2t^2}, \quad \phi_Y(t) = e^{it-\frac{t^2}{2}}, \quad \phi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{8}}$$

(Si ricordi che la funzione caratteristica di un numero aleatorio con distribuzione $N_{m,\sigma}$ è $e^{imt-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$). Assumendo $\rho_{XZ} = \rho_{YZ} = \frac{1}{2}$, calcolare la varianza di $U = \frac{X+Y+Z}{3}$. Determinare la densità del numero aleatorio $V = X + Y$. Calcolare inoltre la probabilità γ dell'evento $(X + Y > \sqrt{5})$.

$$Var(U) = \frac{3}{4} \qquad f_V(v) = N_{\sqrt{5},\sqrt{5}}(v) \qquad \gamma = \frac{1}{2}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA - 26 giugno 2004
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Informatica, Automatica.

1. - Fra 82 scatole di componenti elettronici, una contiene il 25% di pezzi difettosi, mentre le altre 81 contengono in parti uguali pezzi difettosi e pezzi buoni. Si estrae a "caso" una scatola e da questa si estraggono con restituzione 4 pezzi, che risultano tutti buoni (sia E questo evento). Se H_0 è l'evento "la scatola estratta è quella che contiene il 25% di pezzi difettosi", calcolare $P(H_0|E)$ e determinare se E ed H_0 sono stocasticamente indipendenti.

$$\boxed{P(H_0|E) = \frac{1}{17}}$$

E ed H_0 sono stocasticamente indipendenti ? SÌ	NO

2. - Un'urna contiene quattro palline, due bianche (numerate 1 e 2) e due nere (numerate 1 e 2). Si estraggono in blocco due palline e sia $A =$ "le due palline estratte sono dello stesso colore" e $S =$ "la somma dei numeri delle due palline". Stabilire se i numeri aleatori S e $|A|$ sono stocasticamente indipendenti e determinare il punto Q (sul piano $(S, |A|)$) d'intersezione tra le due rette r_1 (di regressione di S su $|A|$) e r_2 (di regressione di $|A|$ su S).

Sono S ed $|A|$ indipendenti ? SÌ	NO	$Q = \left(3, \frac{1}{3}\right)$

3. - È noto che i costituenti relativi ai tre eventi E, F, G sono solo i seguenti: $C_1 = E \wedge F \wedge G$, $C_2 = E^c \wedge F \wedge G$, $C_3 = E \wedge F^c \wedge G$, $C_4 = E \wedge F \wedge G^c$, $C_5 = E^c \wedge F^c \wedge G$. Assegnate le probabilità $P(E) = 0.6, P(F) = 0.3, P(G) = 0.8$, verificare se tali valutazioni sono coerenti e calcolare i valori coerenti per la probabilità p di $E \wedge F \wedge G$.

Coerenti? SÌ	NO	$p \in \left[0, \frac{1}{10}\right]$

4. - Sia X un numero aleatorio con funzione di ripartizione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{5} & 0 \leq x < 2 \\ \frac{3}{5} & 2 \leq x < 4 \\ \frac{7}{10} & 4 \leq x < 8 \\ 1 & x \geq 8 \end{cases}$$

calcolare il suo codominio C_X e la sua funzione caratteristica $\phi_X(t)$

$$\boxed{C_X = \{0, 2, 4, 8\} \qquad \phi_X(t) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}e^{2it} + \frac{1}{10}e^{4it} + \frac{3}{10}e^{8it}}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ 1^o **- 17 luglio 2004**
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Elettronica Informatica, Automatica

1. - Un lotto contiene 10 pezzi di cui 4 sono difettosi. Si effettuano 3 estrazioni senza restituzione e si considerano gli eventi

$$E_k = \text{“il } k\text{-esimo pezzo è difettoso”}, \; k = 1, 2, 3.$$

Calcolare la probabilità p_1 che tra i 3 pezzi estratti 1 sia difettoso, la probabilità p_2 dell'evento $E_1 \wedge E_3$ e la probabilità p_3 dell'evento condizionato $E_1|E_2$.

$$\boxed{p_1 = \frac{1}{2} \qquad p_2 = \frac{2}{15} \qquad p_3 = \frac{1}{3}}$$

2. - Dati due eventi A, B con $cov(|A|, |B|) = 0$, stabilire sotto quali ipotesi A e B sono stocasticamente indipendenti.

$$\boxed{\text{Ipotesi} \qquad 0 < P(A), P(B) < 1}$$

3. - Siano X, Y numeri aleatori non negativi, continui e stocasticamente indipendenti, con funzioni di rischio, rispettivamente, $h_X(t) = log(t + 1)$ e $h_Y(t) = t^2 + 1$. Determinare la funzione di rischio di $Z = \min(X, Y)$.

$$\boxed{h_Z(t) = \log(t + 1) + t^2 + 1}$$

4. - Siano A, B e C tre eventi tali che $(A \vee B) \wedge C^c = \emptyset$. Verificare se l'assegnazione di probabilità $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{3}{10}$, $P(C) = \frac{3}{5}$ è coerente e determinare eventualmente la probabilità $P(A \wedge B \wedge C)$.

P è coerente ?	SÌ	NO

$$\boxed{P(A \wedge B \wedge C) = \frac{3}{10}}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITA' 1^o - 25 settembre 2004
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Elettronica, Gestionale, Informatica, Automatica: 1–4, **Nettuno**: 1–3

1. In un controllo di qualità, si estrae (senza restituzione) un campione di $n = 6$ pezzi da un lotto che ne contiene $N = 30$ fra i quali x difettosi. Il lotto viene accettato (sia H questo evento) se nel campione non c'e' alcun pezzo difettoso: calcolare la probabilità di H nell'ipotesi $x = 2$.

$$\boxed{P(H) = \frac{92}{145}}$$

2. Dati due eventi E, H di probabilità positiva e minore di 1, con $P(E \wedge H) = \frac{2}{5}$, stabilire se la valutazione $P(E|H) = \frac{1}{5}$ è coerente. Se gli eventi E, H sono stocasticamente indipendenti, mantenendo la precedente valutazione di $P(E \wedge H)$ ed assegnando alla probabilità di E il valore $P(E) = \frac{8}{15}$, determinare la corrispondente assegnazione coerente di $P(H)$.

$P(E\|H) = \frac{1}{5}$ è coerente ? SÌ NO	$P(H) = \dfrac{3}{4}$

3. Un vettore aleatorio (X, Y) ha distribuzione uniforme su $\mathcal{C} = [0, 2] \times [0, 2]$. Calcolare le funzioni di ripartizione F_X, F_Y e la probabilità dell'evento condizionato $A|B$, con $A = (X - Y < 0)$, $B = (X < 1)$.

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{x}{2} & 0 < x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}} \qquad \boxed{F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \frac{y}{2} & 0 < y \le 2 \\ 1 & y > 2 \end{cases}} \qquad \boxed{P(A|B) = \frac{3}{4}}$$

4. Sia X un numero aleatorio con funzione di ripartizione

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/2, & 0 \le x < 2 \\ 2/3, & 2 \le x < 3 \\ 5/6, & 3 \le x < 5 \\ 1, & x \ge 5 \end{cases}$$

Determinare il suo codominio $\mathcal{C}_X$, la probabilità degli eventi $\{X = 2\}$, $\{X = 4\}$, la funzione caratteristica $\varphi_X(t)$.

$$\boxed{\mathcal{C}_X = \{0, 2, 3, 5\}} \qquad \boxed{P(X = 2) = \frac{1}{6}} \qquad \boxed{P(X = 4) = 0}$$

$$\boxed{\varphi_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}e^{2it}(1 + e^{it} + e^{3it})}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA - 18 dicembre 2004
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Automatica, Informatica.

1. - Siano A, B, C tre eventi tali che $B \vee C \subset A^c$. Stabilire se la seguente assegnazione di probabilità è coerente: $P(A) = 0.3, P(B) = 0.7, P(C) = 0.6$.

Coerente?	SÌ	NO

2. - Sia T il tempo di attesa fino al primo guasto di un sistema costituito da due componenti A e B in serie. Il componente A ha un tempo di attesa X fino al primo guasto con distribuzione esponenziale di parametro 3, mentre quello Y del componente B ha distribuzione esponenziale di parametro $\frac{2}{3}$. Supponendo X e Y indipendenti, determinare il tasso di avaria del numero aleatorio T.

$$\boxed{h(t) = \frac{11}{3}}$$

3. - Un vettore aleatorio (X, Y) ha distribuzione uniforme su un triangolo $\mathcal{C}$ di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$. Calcolare le densità marginali f_X, f_Y e la probabilità dell'evento condizionato $E|H$, con $E = (Y - X > 0)$, $H = (X > 1/2)$.

$$f_X(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2 - x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y) & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad P(E|H) = 0$$

4. - Da un lotto contenente 2 pezzi difettosi e 8 buoni si estraggono senza restituzione 4 pezzi. Sia E_i ="l' i-esimo pezzo estratto è difettoso" e posto $X = \sum_{i=1}^{4} |E_i|$, calcolare la probabilità $p_2 = P(X = 2)$, la varianza di X e la probabilità α dell'evento condizionato $E_3|E_1$

$$p_2 = \frac{2}{15} \qquad \text{var}(X) = \frac{32}{75} \qquad \alpha = \frac{1}{9}$$