CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 15 gennaio 2005
Ing. Elettronica : 1–4, Nettuno : 1–3
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Siano A, E eventi incompatibili, e sia $B \subset E$, con
$$P(A) = \frac{1}{5}\,,\; P(B) = \frac{3}{10}\,,\; P(E) = \frac{1}{2}\,.$$
Dimostrare che tale assegnazione è coerente, determinando i relativi costituenti e calcolandone le probabilità. Calcolare inoltre la previsione di $X = |A| - |B| + 3|E|$.
$$C_1 = A^c \wedge B \wedge E\ ,\ C_2 = A^c \wedge B^c \wedge E\ \ ,\ C_3 = A \wedge B^c \wedge E^c\ ,\ C_4 = A^c \wedge B^c \wedge E^c\ ;$$
$$P(C_1) = \frac{3}{10},\; P(C_2) = \frac{1}{5},\; P(C_3) = \frac{1}{5},\; P(C_4) = \frac{3}{10};\;\; \mathbb{P}(X) = \frac{7}{5}.$$

2. Supposto che il numero X di clienti che tra le 9 e le 10 di mattina arrivano ad uno sportello segua la distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 3$, calcolare la previsione di X e la probabilità p che arrivino più di due clienti.
$$\mathbb{P}(X) = 3 \qquad\qquad p = 1 - \frac{17}{2}e^{-3}$$

3. Dato un numero aleatorio X con distribuzione uniforme in $(0, 1)$, e posto $Y = 1 + X$, calcolare il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$, la covarianza $cov(X, Y)$, e la funzione di ripartizione $F_Y(y)$ di Y.
$$\rho(X,Y) = 1 \qquad cov(X,Y) = \frac{1}{12} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 1 \\ y-1 & 1 < y \le 2 \\ 1 & y > 2 \end{cases}$$

4. Calcolare la funzione di sopravvivenza $S(x)$ e la funzione di rischio $h(x)$ del numero aleatorio X di densità
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\,,\; 0 \le x < 1 \\ \frac{2}{3}\,,\; 1 \le x \le 2 \\ 0\;\; \textit{altrove.} \end{cases}$$
$$S(x) = \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ 1 - \frac{x}{3} & 0 < x \le 1 \\ \frac{2}{3}(2-x) & 1 < x \le 2 \\ 0 & x \ge 2 \end{cases} \qquad\qquad h(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{1}{3-x} & 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{2-x} & 1 < x < 2 \end{cases}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 12 febbraio 2005
Ing. Elettronica : 1–4, Nettuno : 1–3
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Contrassegnare (a sinistra) le affermazioni seguenti con V o F a seconda che siano vere o false (per motivare le risposte, dimostrare i casi V e citare un controesempio per i casi F)
   - due eventi incompatibili sono stocasticamente indipendenti **F**
   - date le distribuzioni marginali di un vettore aleatorio (X, Y), si può sempre determinare la sua distribuzione congiunta **F**
   - due numeri aleatori indipendenti hanno sempre covarianza zero **V**
   - data la distribuzione congiunta di un vettore aleatorio (X, Y), si possono sempre determinare le sue distribuzioni marginali **V**
   - due eventi stocasticamente indipendenti sono sempre equiprobabili **F**

2. Sia X il tempo di attesa fino al primo guasto di un dispositivo D, con tasso di avaria $h(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$. Calcolare la funzione di ripartizione di X, dopo aver discusso la ammissibilità di $h(x)$ come tasso di avaria per D.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-4\sqrt{x}} & x > 0 \end{cases}$$

3. Sia (X, Y) un vettore aleatorio discreto, con distribuzione di probabilità costante sul codominio $\mathcal{C} = \{(0,0), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$. Calcolare la probabilità condizionata $P(X \leq 1 | X \neq Y)$, la covarianza di X e Y, e la varianza di $Y - X$.

$$P(X \leq 1 | X \neq Y) = \frac{1}{2} \qquad cov(X, Y) = \frac{9}{25} \qquad var(Y - X) = \frac{2}{5}$$

4. Siano X, Y, Z numeri aleatori indipendenti con distribuzione uniforme sull'intervallo $(0, 2)$. Posto $U = \max\{X, Y, Z\}$, calcolare la funzione di ripartizione e la previsione del numero aleatorio $V = 2 - U$.

$$F(v) = \begin{cases} 0 & v \leq 0 \\ 1 - \left(\frac{2-v}{2}\right)^3 & 0 < v \leq 2 \\ 1 & v \geq 2 \end{cases} \qquad \mathbb{P}(V) = \frac{1}{2}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 23 marzo 2005
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Ing. Gestionale.

1. - Si considerino i tre eventi A="L'età di Tizio è minore di 18 anni", M_1="Tizio è residente a Roma nel I municipio", H ="Tizio ha la patente automobilistica". Verificare se l'assegnazione di probabilità $P(A \wedge M_1) = \frac{1}{10}$, $P(M_1) = \frac{3}{10}$, $P(H \wedge M_1) = \frac{9}{40}$ è coerente.

P è coerente ?	SÌ	NO

2. - Un sistema di controllo S è costituito da due dispositivi D_1 e D_2 in serie. Siano X, Y, T i tempi aleatori di durata di D_1, D_2 ed S, rispettivamente. La densità congiunta di (X, Y) è $f(x, y) = 6ye^{-2x-\frac{3}{2}y^2}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Determinare se X e Y sono stocasticamente indipendenti, calcolare la funzione di ripartizione $F_T(t)$ e la funzione di rischio $h_T(t)$ di T.

X e Y sono stocasticamente indipendenti ?	SÌ	NO

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t(2+\frac{3}{2}t)} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad h_T(t) = \begin{cases} 2 + 3t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

3. - La funzione di ripartizione di X è

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leq x < 2 \\ \frac{3}{4} & 2 \leq x < 4 \\ \frac{7}{8} & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

Determinare il codominio di X, e la funzione caratteristica di $Y = X - 1$.

$$C_X = \{0, 2, 4, 5\} \qquad \phi_Y(t) = e^{-it}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{2it} + \frac{1}{8}e^{4it} + \frac{1}{8}e^{5it}\right)$$

4. - Sia X un numero aleatorio con distribuzione normale di media 3 e varianza 4. Determinare la probabilità p dell'evento condizionato $(X < 3)|(X < 4)$ e l'intervallo di confidenza di lunghezza minima I al 95% relativo al numero aleatorio X. (Si tenga presente che $\Phi(1.96) = 0.975$).

$$p = \frac{1}{2\Phi(1/2)} \qquad I = [-0.92, 6.92]$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 16 aprile 2005
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Ing. Gestionale :1–4, **Nettuno** :1–3

1. - Sia X il tempo di attesa fino al primo guasto di un dispositivo D, con tasso di avaria $h(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$. Calcolare la funzione di ripartizione di X, dopo aver discusso la ammissibilità di $h(x)$ come tasso di avaria per D.

$h(x)$ ammissibile ?	SÌ	NO	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-4\sqrt{x}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

2. - Siano A, E eventi incompatibili, e sia $B \subset E$, con

$$P(A) = \frac{2}{5}\,,\; P(B) = \frac{3}{10}\,,\; P(E) = \frac{1}{2}\,.$$

Dimostrare che tale assegnazione è coerente. Calcolare la previsione e la varianza di $X = |A| - 2|B| + 3|E|$.

P è coerente ?	SÌ	NO	$\mathbb{P}(X) = \frac{13}{10}$	var$(X) = \frac{81}{100}$

3. - Siano U e V due lotti tali che U contenga 30 pezzi buoni e 10 difettosi, mentre V contiene 75 pezzi buoni e 25 difettosi. Si estraggano con restituzione da U 10 pezzi e da V 30 pezzi. Se X e Y sono il numero di pezzi difettosi estratti rispettivamente dal lotto U e V, determinare la distribuzione di $Z = X + Y$ e calcolare la funzione caratteristica, la media m e la varianza di Z.

$Z \sim Bin(40, \frac{1}{4})$	$\phi_Z(t) = \left(\frac{1}{4}e^{it} + \frac{3}{4}\right)^{40}$	$m = 10$	$\sigma^2 = \frac{15}{2}$

4. - Sia X un numero aleatorio con distribuzione uniforme in $[0, 1]$: calcolare il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$, essendo $Y = 2 + 3X$, e cov(X, Y). Determinare la probabilità dell'evento $(XY \geq 0)$ e la funzione di ripartizione di Y.

$\rho(X, Y) = 1$	cov(X,Y) $= \frac{1}{4}$	$P(XY \geq 0) = 1$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 2 \\ \frac{y-2}{3} & 2 \leq y \leq 5 \\ 1 & y > 5 \end{cases}$$

PROBABILITA' E STATISTICA - 25 giugno 2005
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Nettuno

1. - Dati tre eventi A, B, C, con $A \subset B \wedge C$, $P(A) = 0.1$, $P(B) = P(C) = 0.6$, $P(B \wedge C) = x$, determinare l'insieme I dei valori x coerenti.

$$I = [0.2\,,\ 0.6]$$

2. - Il consumo di energia elettrica di un'industria in ciascuna giornata è un numero aleatorio X con densità della forma

$$f(x) = \begin{cases} kx^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{11}{5} - x & 1 < x \leq 2 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Determinare la costante k e calcolare la previsione di X.

$$k = \frac{6}{5} \qquad\qquad \mathbb{P}(X) = \frac{181}{150}$$

3. - Siano X e Y due numeri aleatori indipendenti aventi entrambi di-stribuzione esponenziale con parametri 2 e 3 rispettivamente. Determinare la covarianza $cov(X, Y)$ e, considerato $U = X - Y$, determinare la probabilità $P(U > 0)$.

$$cov(X, Y) = 0 \qquad\qquad P(U > 0) = \frac{3}{5}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITA' E STATISTICA - 16 luglio 2005

Scrivere le risposte negli appositi spazi. Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

Elettronica I^o**mod., Gestionale, Automatica-Informatica** : Es.1–4 ; **Nettuno** : Es.1–3

1. - Dati tre eventi A, B, C, con $B \wedge C \subseteq A \subseteq B$, $P(A) = 0.4$, $P(B) = P(C) = 0.6$, determinare l'insieme I dei valori di probabilità coerenti per $A \wedge B \wedge C$ e determinare se esiste un valore λ che renda A, B e C stocasticamente indipendenti.

$$I = \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right] \qquad\qquad \lambda \text{ non esiste}$$

2. - Un macchinario effettua un controllo di qualità su barre metalliche : queste sono accettate se la lunghezza della barra è compresa tra 4.24 cm e 4.36 cm. Supposto che la lunghezza delle barre abbia distribuzione normale con media $\mu = 4.3$ e varianza $\sigma^2 = 0.16$, esprimere la probabilità p che una barra venga scartata mediante la funzione di ripartizione Φ della normale standard.

$$p = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{3}{20}\right)\right)$$

3. - Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} kxy\ , & (x,y) \in T \\ 0\ , & \text{altrove} \end{cases}$$

essendo T il triangolo di vertici $(0,0), (0,2), (1,0)$. Determinare la costante k e, per ogni x fissato in $[0,1)$, la densità condizionata marginale di $Y|x$.

$$k = 6 \qquad\qquad f_2(y|x) = \begin{cases} \dfrac{y}{2(1-x)^2}\ , & y \in (0, 2(1-x)) \\ 0\ , & \text{altrove} \end{cases}$$

4. - Un tecnico è addetto alla manutenzione di tre computer, e sia T_i ($i = 1,2,3$) il tempo di funzionamento dell'i-esimo computer. Supposto che T_1, T_2, T_3 abbiano distribuzione esponenziale di parametro 2, e che essi siano stocasticamente indipendenti, determinare la funzione di ripartizione del tempo U del primo intervento del tecnico. Calcolare la probabilità p che il computer T_1 si guasti prima del computer T_2.

$$F_U(u) = \begin{cases} 1 - e^{-6t}\ , & t \geq 0 \\ 0\ , & t < 0 \end{cases} \qquad ; \qquad p = \frac{1}{2}$$