CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 14 gennaio 2006

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

Elettronica I° mod.: Es.1-4. **Nettuno:** Es.1-3. **V.O.:** Es.1-6.

1.- Una scatola contiene 5 palline (bianche o nere, con al più una pallina nera). Considerato l'evento

A=la scatola contiene esattamente una pallina nera

e supposto che $P(A) = \frac{1}{2}$, si estraggono a caso, senza restituzione, n palline, che risultano essere tutte bianche. Calcolare il numero n di estrazioni necessarie affinché la probabilità di A , condizionata al risultato suddetto, sia minore o uguale a $\frac{2}{5}$.

$$n = 2$$

2.- Sia X un numero aleatorio continuo tale che

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$$

per ogni $s, t > 0$. Calcolare la previsione di $Y = (X + 2)^2$ in funzione di $m = \mathbb{P}(X)$.

$$\mathbb{P}(Y) = 2(m^2 + 2m + 2)$$

3.- Stabilire se il tasso di avaria $h(x)$ di un numero aleatorio $X \geq 0$ con densità di probabilità $f(x) = \begin{cases} 12x^{11}e^{-x^{12}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ è crescente, decrescente, costante.

$h(x) = 12x^{11}$; ~~crescente~~ decrescente costante

4.- Siano $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ le densità marginali di un vettore aleatorio (X, Y) con distribuzione uniforme su $A = [0, 2] \times [0, 2]$. Calcolare la funzione caratteristica di $Z = X + Y$.

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \left(\frac{e^{2it}-1}{2it}\right)^2$$

5.- Dato un processo uniforme su $[0, \pi]$, con $n = 5$, e considerate le statistiche d'ordine $X_{(1)}, \dots, X_{(5)}$ e le lacune $L_1, \dots, L_5$, contrassegnare le affermazioni seguenti con V o F, a seconda che siano vere o false:

- Le statistiche d'ordine hanno distribuzione esponenziale **F**
- la densità di L_k ($k = 1, \dots, 5$) non dipende da k **V**
- $X_{(1)}, \dots, X_{(5)}$ sono indipendenti **F**
- $L_1, \dots, L_5$ sono indipendenti **F**
- si ha $\mathbb{P}(L_3) = \pi$ **F**

6.- Siano X e Y , rispettivamente, gli arrivi in $[0, 2]$ e $(2, 3]$ di un processo di Poisson di intensità $\lambda = 2$. Calcolare la probabilità che non si abbia alcun arrivo nei due intervalli. Posto poi $H = \{X + Y = 3\}$, calcolare la previsione di X condizionata ad H .

$$P(X = 0, Y = 0) = e^{-6}; \quad \mathbb{P}(X|H) = 2$$

CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 4 febbraio 2006

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

Elettronica I^o mod.: Es.1-4. **Nettuno:** Es.1-3.

1.- Sia X un numero aleatorio con densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (x_1, x_2) \\ 0, & x \notin (x_1, x_2) \end{cases},$$

con $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. Determinare x_1 e x_2 sapendo che $\mathbb{P}(X) = 1$.

$$x_1 = \frac{1}{e-1}; \quad x_2 = \frac{e}{e-1}$$

2.- Due lotti contengono, rispettivamente, il 90% e il 70% di pezzi non difettosi. Si sceglie a caso un lotto, si estrae da esso un pezzo, si rimette a posto, poi si sceglie di nuovo a caso un lotto e si estrae un pezzo. Calcolare la probabilità p che i due pezzi risultino entrambi non difettosi.

$$p = \frac{16}{25}$$

3.- Siano A , B eventi, con $P(A|B) = 0.5$. La valutazione $P(A \wedge B) = 0.3$ è coerente? Dare una valutazione coerente (e diretta) di $P(A)$ affinché gli eventi A , B siano stocasticamente indipendenti. Determinare infine le valutazioni coerenti di $P(B)$.

$P(A \wedge B) = 0.3$ coerente? SI NO ; $P(A) = 0.5$; $P(B) = 0.6$

4.- Determinare le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ di un vettore aleatorio (X, Y) con densità congiunta

$$f(x, y) = \begin{cases} xy e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare poi la funzione caratteristica di $Z = X + Y$.

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}; \quad f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y} & y > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}; \quad \varphi_Z(t) = \frac{1}{(1-it)^4}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 1 aprile 2006

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

Gestionale : Es.1-4. **Nettuno** : Es.1-3.

1. E' noto che i costituenti relativi ai tre eventi E, F, G sono solo i seguenti: $C_1 = E \wedge F \wedge G, C_2 = E^c \wedge F \wedge G, C_3 = E \wedge F^c \wedge G, C_4 = E \wedge F \wedge G^c, C_5 = E^c \wedge F^c \wedge G$.

Assegnate le probabilità $P(E) = 0.6, P(F) = 0.3, P(G) = 0.8$, verificare se tali valutazioni sono coerenti e calcolare i valori coerenti per la probabilità p di $E \wedge F \wedge G$.

coerenti? SÌ NO $p \in [0, 0.1]$

2. Siano U e V due urne contenenti rispettivamente 3 palline bianche e 2 nere e 6 palline bianche e 5 nere. Dopo aver estratto (senza guardarla) una pallina dall'urna U e averla immessa nell'urna V , viene estratta una pallina dall'urna V . Considerati gli eventi $E =$ "la pallina estratta dall'urna U è bianca" e $F =$ "la pallina estratta dall'urna V è bianca", si calcoli $P(F), P(E|F)$ e si riconosca se E ed F sono stocasticamente indipendenti.

$P(F) = \frac{11}{20}$ $P(E|F) = \frac{7}{11}$ indipendenti? SÌ NO

3. Dato un numero aleatorio X con funzione di ripartizione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1/8 & -1 \leq x < 3 \\ 1/4 & 3 \leq x < 8 \\ 1 & x \geq 8 \end{cases}$$

determinare il codominio C_X e calcolare la probabilità degli eventi $\{X = 2\}, \{X = 8\}, \{2 < X \leq 5\}$.

$C_X = \{-1, 3, 8\}$ $P(X = 2) = 0$ $P(X = 8) = \frac{3}{4}$ $P(2 < X \leq 5) = \frac{1}{8}$

4. Determinare le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ di un vettore aleatorio (X, Y) con densità congiunta

$$f(x, y) = \begin{cases} xye^{-(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Calcolare poi la funzione di ripartizione di $Z = \min\{X, Y\}$.

$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ $f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$ $F_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-2z}(z+1)^2 & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Un'urna contiene 3 palline bianche e 5 nere. Si estrae una pallina a caso. Se la pallina estratta è nera (sia E_1 questo evento), la pallina viene riposta nell'urna insieme ad altre 2 palline nere. Se, invece, la pallina estratta viene bianca, nessuna pallina è riposta nell'urna. Si procede quindi a una successiva estrazione (sia E_2 l'evento "pallina nere alla seconda estrazione"). Qual è la probabilità p di estrarre due palline nere? Qual è la probabilità α di estrarre due palline dello stesso colore?

$$p = \frac{7}{16} \qquad \alpha = \frac{61}{112}$$

2. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità congiunta

$$f(x, y) = \begin{cases} kx^2y & (x, y) \in T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

essendo T il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$. Determinare la costante k e le densità marginali di X e di Y .

$$k = 5 \qquad f_X(x) = \begin{cases} 30x^2(x-1)^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{5}{8}y(2-y)^3 & 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

3. Un numero aleatorio X ha la seguente funzione di ripartizione

$$\begin{cases} 0 & x < -2 \\ 1/2 & -2 \leq x < 1 \\ 3/4 & 1 \leq x < 4 \\ 11/12 & 4 \leq x < 7 \\ 1 & x \geq 7 \end{cases}$$

Determinare il codominio di X e calcolare le probabilità $P(-2 \leq X < 4)$ e $P(3 < X \leq 7)$.

$$C_X = \{-2, 1, 4, 7\} \qquad P(-2 \leq X < 4) = \frac{3}{4} \qquad P(3 < X \leq 7) = \frac{1}{4}$$

4. Un sistema di controllo S è costituito da due dispositivi D_1 e D_2 in parallelo. Siano X, Y, T i tempi aleatori di vita di D_1, D_2 ed S , rispettivamente. La densità congiunta di (X, Y) è $f(x, y) = 3e^{-2x - \frac{3}{2}y}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Determinare se X e Y sono stocasticamente indipendenti (cerchiare la risposta giusta), calcolare la funzione di ripartizione $F_T(t)$ e la probabilità p che il tempo di vita di X sia minore di quello di Y .

X e Y sono stocasticamente indipendenti? SÌ NO

$$F_T(t) = \begin{cases} (1 - e^{-2t})(1 - e^{-3/2t}) & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \qquad p = \frac{4}{7}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 28 giugno 2006

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

Elettronica, Gestionale : Es.1-4. **Nettuno** : Es.1-3.

1. Dati due eventi A, B incompatibili, e un evento $E \subseteq B$, considerare le assegnazioni di probabilità

$$P(A) = \frac{2}{5}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(E) = \frac{1}{4}.$$

Quanti sono i costituenti relativi ai tre eventi A, B, E ? L'assegnazione è coerente? Calcolare la previsione di $X = |A| - |B| + 2|E|$.

I costituenti sono 8 ; 7 ; 6 ; 5 ; $\textcircled{4}$; 3

coerente? $\textcircled{\text{SÌ}}$ NO $\mathbf{P}(X) = \frac{2}{5}$

2. Sia Z un numero aleatorio con distribuzione uniforme su $[0, 2\pi]$. Calcolare il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$ e la varianza di $X^2 + Y^2$, essendo $X = \sin Z, Y = \cos Z$.

$$\rho(X, Y) = 0$$

$$\text{var}(X^2 + Y^2) = 0$$

3. Un campione casuale è costituito da numeri aleatori esponenziali indipendenti $X_1, X_2, \dots, X_n$ di parametro α . Determinare la distribuzione di probabilità del numero aleatorio $Z = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

$$f_Z(z) = \begin{cases} n\alpha e^{-n\alpha z} & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

4. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità congiunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+y)}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

Senza ricorrere alle distribuzioni marginali, calcolare la covarianza di X, Y e stabilire se X e Y sono indipendenti.

$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{4}$ X, Y indipendenti? SÌ $\textcircled{\text{NO}}$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 23 settembre 2006

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

Elettronica, Gestionale : Es.1–4. **Nettuno** : Es.1–3.

1.- Siano X, Y due numeri aleatori continui, dove X ha distribuzione esponenziale e

$$Y = 1 + \beta X .$$

Determinare l'insieme B dei valori β per i quali $\rho(X, Y) = 1$.

$$B = \{\beta \in \mathbb{R} : \beta > 0\}$$

2.- Sia (X, Y) un vettore aleatorio continuo con distribuzione uniforme sul triangolo T con vertici nei punti $(0, 0), (e, e), (0, 2e)$. Calcolare la previsione di $Z = X + Y$.

$$\mathbf{P}(Z) = \frac{4}{3}e$$

3.- Un punto A_1 viene scelto a caso nell'intervallo $[0, 1]$: se

$$A_1 \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right]$$

(“successo”), il processo si interrompe, altrimenti si sceglie un altro punto A_2 con le stesse modalità. Se

$$A_2 \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right],$$

il processo si interrompe, in caso contrario si prosegue con la scelta di A_3 , e così via. Se X è il numero aleatorio di punti così generati in $[0, 1]$ fino all'interruzione del processo, calcolare la probabilità α dell'evento $(X = n)$ e la previsione di X .

$$\alpha = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} \qquad \mathbf{P}(X) = 4$$

4.- Un lotto contiene N pezzi (ognuno dei quali può essere buono o difettoso), e si suppongano equiprobabili tutte le sue possibili composizioni. Si introduce un pezzo difettoso, e poi si estrae a caso un pezzo, che risulta essere difettoso. Qual è la probabilità p che i pezzi siano tutti difettosi ?

$$p = \frac{2}{N + 2}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 21 dicembre 2006

Scrivere le risposte negli appositi spazi.

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati.

Ing. Gestionale : 1- 4

Nettuno : 1-3

1. Un test di esame contiene 5 domande a risposta multipla. Ogni domanda ha 4 possibili risposte, di cui esattamente una è giusta. Per passare l'esame occorre rispondere bene ad almeno 3 domande. Se uno studente risponde ad ogni domanda scegliendo a caso la risposta tra le quattro disponibili, qual è la probabilità p che passi l'esame? Inoltre qual è la previsione m del numero aleatorio X = "il numero di risposte esatte"? Discutere il risultato ottenuto.

$$p = 53/512$$

$$m = 5/4$$

2. Il test della proteina α -fetale viene usato per individuare la spina bifida nei feti. La probabilità che un feto sia affetto da spina bifida è $\frac{1}{1000}$. La letteratura sul test indica che nel 5% dei casi il test risulta positivo supposto che il feto sia normale (cioè non affetto da spina bifida). Inoltre il test è sempre positivo quando il feto è affetto da spina bifida. Supposto che il test di una donna risulti positivo, qual è la probabilità p che il bambino abbia la spina bifida?

$$p = 20/1019$$

3. Dati due numeri aleatori X, Y tali che $\rho(X, Y) = \frac{7}{10}$, $var(X) = 3$, $var(Y) = \frac{42}{10}$, calcolare il valore del coefficiente angolare della retta di regressione di Y su X , cioè $Y = \alpha + \beta X$.

$$\beta = 0.83$$

4. Sia (X, Y) un vettore aleatorio, dove X = "il tempo (in anni) per la realizzazione di un progetto A" ed Y = "il costo (in milioni di euro) per la realizzazione di A". Se (X, Y) ha distribuzione uniforme in $D = [4, 8] \times [9, 12]$, calcolare la probabilità p_1 di $C = (Y > X + 5) \wedge (X > 6) \wedge (Y > 10)$ e $p_2 = P((X > 6.5)|C)$.

$$p_1 = 1/24$$

$$p_2 = 1/4$$