CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 20 gennaio 2007

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

Elettronica: Es.1–4. **Nettuno**: Es.1–3.

1. – Si effettuano due estrazioni con restituzione da un lotto contenente 3 pezzi difettosi e 7 buoni. Dati gli eventi $A =$ "pezzo buono alla prima estrazione", $B =$ "pezzo difettoso alla prima estrazione", $H =$ "pezzo difettoso alla seconda estrazione" determinare l'insieme $\mathcal{C}$ dei costituenti (relativi ai tre eventi A, B, H) e le loro probabilità.

$$\mathcal{C} = \{C_1 = A \wedge B^c \wedge H \ , C_2 = A^c \wedge B \wedge H \ , C_3 = A \wedge B^c \wedge H^c \ , C_4 = A^c \wedge B \wedge H^c \ \} \, ;$$

$$P(C_1) = 21/100 \quad , P(C_2) = 9/100 \quad , P(C_3) = 49/100 \quad , P(C_4) = 21/100 \quad .$$

2. – Sia X un numero aleatorio che assume i valori $\{\mathbf{x}, 2, 3, 7\}$ con probabilità rispettive $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \mathbf{p}$. Determinare $\mathbf{p}$ e, nell'ipotesi che $\mathbb{P}(X) = 3.2$, il valore $\mathbf{x}$.

$\mathbf{p}= 1/5$; $\mathbf{x}= 1/2$

3. – Si lanciano contemporaneamente due dadi. Considerati i seguenti eventi

$E =$"i due numeri ottenuti sono diversi tra loro"

$H =$"i due numeri ottenuti sono entrambi dispari"

calcolare le probabilità $P(E|H)$ e $P(H|E)$. Gli eventi E, H sono stocasticamente indipendenti?

$P(E|H) = 2/3$; $P(H|E) = 1/5$

E, H stocasticamente indipendenti? NO

4. – Dato un numero aleatorio X con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$, calcolare il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$, con $Y = 2\lambda - 3X$. Determinare inoltre la funzione di ripartizione $F_Y(y)$ di Y.

$$\rho(X,Y) = -1 \qquad ; \quad F_Y(y) = \begin{cases} e^{\frac{\lambda}{3}(2\lambda - y)}, & y \leq 2\lambda \\ 1, & y > 2\lambda \end{cases}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 17 febbraio 2007

Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Elettronica: Es.1–4. **Nettuno**: Es.1–3.

1. – Si considerino gli eventi

$A_i =$"pallina bianca all'i-esima estrazione" (da un'urna contenente palline bianche e nere), con $i = 1, 2, 3$.

Rappresentare (in funzione degli eventi A_i) i seguenti eventi, utilizzando il concetto di evento contrario e le operazioni di unione e di intersezione:
A= nessuna pallina bianca
B= pallina bianca solo alla prima estrazione
C= almeno una pallina bianca
D= esattamente una pallina bianca
E= non piú di una pallina bianca
F= non piú di due palline nere
G= pallina bianca alla prima ed alla terza estrazione, e pallina nera alla seconda

$$A = A_1^c \wedge A_2^c \wedge A_3^c \; ; \quad B = A_1 \wedge A_2^c \wedge A_3^c \; ; \quad C = A_1 \vee A_2 \vee A_3 \; ;$$

$$D = (A_1 \wedge A_2^c \wedge A_3^c) \vee (A_1^c \wedge A_2 \wedge A_3^c) \vee (A_1^c \wedge A_2^c \wedge A_3) \; ; \quad E = A \vee D \; ; \quad F = C \; ; \quad G = A_1 \wedge A_2^c \wedge A_3 \, .$$

2. – Un numero aleatorio X ha codominio $\{1, 4, 5, \mathbf{x}\}$, con probabilità rispettive $\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}$, $\mathbf{p}$ e previsione $\mathbb{P}(X) = 5$. Calcolare la varianza del numero aleatorio

$$Y = 3X + 5 \, .$$

$var(Y) = 24.3$

3. – Si ritiene, con probabilità $p \neq 1$, che i pezzi di un lotto siano tutti buoni (sia E questo evento). Si estrae "a caso" uno di questi, e sia H l'evento "il pezzo estratto è buono". Se $P(H|E^c) = \alpha$, calcolare la probabilità di E nell'ipotesi H. Determinare poi α in modo tale che H ed E siano stocasticamente indipendenti.

$$P(E|H) = \frac{p}{p + (1-p)\,\alpha} \; , \qquad \alpha = 1$$

4. – Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{36}\, xy \; , & (x,y) \in A \\ 0 \; , & \text{altrove} \end{cases}$$

essendo $A = \{(x, y) \, : \, 1 \leq x \leq 4 \, , \, 2 \leq y \leq 5\}$. Determinare la previsione di

$$Z = \frac{1}{XY} \, .$$

$\mathbb{P}(Z) = 1/4$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 23 marzo 2007

Scrivere le risposte negli appositi spazi. Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati.
Ing. Gestionale :1–4 ; **Nettuno** :1–3.

1- Un aereo arriva in ritardo il 70% delle volte quando piove, ma solo il 20% delle volte quando non piove. Se le previsioni del tempo danno pioggia al 40% (sia B questo evento) qual è la probabilità dell'evento $A =$" l'aereo arriva in ritardo" ?

$$P(A) = 0.4$$

2 - Due palline sono estratte casualmente da un urna, che ne contiene 10, numerate da 1 a 10. Determinare la probabilità che la somma dei numeri delle due palline estratte sia 16 nel caso di estrazioni senza restituzione e nel caso di estrazioni con restituzione.

$$p_s = \frac{2}{45} \qquad\qquad p_c = \frac{1}{20}$$

3 - Il danno X, in milioni di euro, causato da un incendio in un centro commerciale ha una distribuzione

$$f(x) = \begin{cases} k(20-x) & \text{per } 0 < x < 20 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

dove k è una costante. Determinare k. Supposto che il danno sia superiore a 8 milioni, qual è la probabilità p che il danno sia inferiore a 16 milioni ?

$$k = \frac{1}{200} \qquad\qquad p = \frac{8}{9}$$

4 - In un sistema complesso, per ogni componente critico è previsto un componente di ricambio, che entra automaticamente in funzione quando si guasta il componente originario (così il sistema continua a funzionare). Il sistema si interrompe quando anche il ricambio si guasta. Si assuma che il tempo X di durata del componente originario e quello Y del componente di ricambio siano stocasticamente indipendenti ed abbiano entrambi distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 3$. Determinare la funzione di ripartizione F_T della durata $T = X + Y$ di funzionamento del sistema e la funzione di ripartizione F_Z della proporzione di tempo $Z = \frac{X}{X+Y}$ di funzionamento del componente originario rispetto a quello di durata del sistema.

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-3t} - 3te^{-3t} & t > 0 \\ \\ 0 & t \le 0 \end{cases} \qquad\qquad F_Z(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ t & 0 < t < 1 \\ 1 & t \ge 1 \end{cases}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - 20 aprile 2007
Scrivere le risposte negli appositi spazi.
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati.
Ing. Gestionale :1–4 ;

1 - Il tempo X (misurato in secondi) che intercorre tra le richieste a un server web ha distribuzione esponenziale con parametro 2. Determinare la previsione $\mathbb{P}(X)$ e la deviazione standard σ_X di X. Calcolare la funzione di ripartizione F_Y e la densità f_Y di $Y = \frac{1}{X}$.

$$\mathbb{P}(X) = \frac{1}{2} \qquad \sigma_X = \frac{1}{2}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{y}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{y^2} e^{-\frac{2}{y}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

2 - Una macchina produce dei pezzi il cui peso è distribuito normalmente con valore medio $m = 18$ grammi e deviazione standard di 1 grammo. Sapendo che devono essere scartati i pezzi di peso superiore a 20,5 grammi o inferiore a 15,5 grammi, determinare la probabilità p di scartare un pezzo.

$$p = 2\,[1 - \Phi(2.5)] \simeq 0.0124$$

3 - Da un'indagine sulla popolazione italiana risulta che la probabilità che un adulto sia una donna è 0.51, la probabilità che un adulto sia divorziato è 0.07 e la probabilità che un adulto sia una donna divorziata è 0.04. Determinare la probabilità dei seguenti eventi
$A =$"un adulto sia una donna oppure sia divorziato",
$B =$"un adulto sia un uomo",
$C =$"un adulto sia un uomo divorziato".

$$P(A) = 0.54 \qquad P(B) = 0.49 \qquad P(C) = 0.03$$

4 - Siano A e B due componenti elettrici con durata di vita, rispettivamente, X e Y. La densità congiunta di (X, Y) è

$$f(x, y) = 6\, e^{-(3x+2y)}, \qquad x, y > 0,$$

e $f(x, y) = 0$ altrove. Determinare la probabilità p_1 che entrambi i componenti siano funzionanti al tempo t. Determinare la probabilità p_2 che il componente A sia il primo a guastarsi.

$$p_1 = e^{-5t} \qquad p_2 = \frac{3}{5}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 14 luglio 2007

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati.

Elettronica (1^o Mod.), Gestionale: Es. $1-4$

Nettuno (PROBABILITA' E STATISTICA): Es. $1-3$

1. - Dato un vettore aleatorio discreto (X, Y), con

$$P(X=0, Y=0) = P(X=1, Y=1) = P(X=1, Y=2) =$$

$$= P(X=2, Y=1) = P(X=2, Y=2) = \frac{1}{5} \ ,$$

calcolare $P\Big((X \geq 1) | (X \neq Y)\Big)$, $cov(X, 3Y)$, $var(X-3Y)$.

RISPOSTE: $P\Big((X \geq 1) | (X \neq Y)\Big) = 1$; $cov(X, 3Y) = \frac{27}{25}$; $var(X-3Y) = \frac{86}{25}$

2. - Un'industria produce cilindri metallici di due tipi. Il peso X di quelli del primo tipo è un numero aleatorio con distribuzione normale $N_{m_1, \sigma_1}(x)$, con $m_1 = 25\, kg$ e scarto standard $\sigma_1 = 3\, kg$, mentre il peso Y di quelli del secondo tipo è un numero aleatorio con distribuzione normale $N_{m_2, \sigma_2}(y)$, con $m_2 = 22\, kg$ e scarto standard $\sigma_2 = 2\, kg$. Data una produzione giornaliera composta per il 40% di cilindri del primo tipo e per il 60% di cilindri del secondo tipo, calcolare – in funzione di $\Phi(3/2)$ – la probabilità p che, per un cilindro estratto da questa popolazione, il peso Z sia maggiore di 25 kg.

RISPOSTA: $p = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}\, \Phi\Big(\frac{3}{2}\Big)$

3. - Sia (X, Y) un vettore aleatorio con distribuzione uniforme sul triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$. Stabilire se i numeri aleatori X ed Y sono indipendenti.

RISPOSTA: X e Y indipendenti? NO

4. - Dati tre eventi A_1, A_2, A_3 tali che $A_1 \supseteq A_2 \vee A_3$, studiare la coerenza dell'assegnazione di probabilità

$$P(A_1^c) = 0.2 \ , \ P(A_2) = 0.6 \ , \ P(A_3) = 0.5 \, .$$

RISPOSTA: Coerente? SI

CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 15 settembre 2007

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati.

Elettronica (1^o Mod.), Gestionale: Es. $1-4$

Nettuno (PROBABILITA' E STATISTICA): Es. $1-3$

1. - Secondo un'indagine il 5% della popolazione è affetta da un tumore al polmone. Per un soggetto affetto da tale tumore, la probabilità che sia fumatore è 0.9, mentre se il soggetto non è affetto dal tumore, la probabilità che sia non fumatore è 0.7.

Determinare la probabilità p che un soggetto fumatore (evento F) sia affetto da un tumore al polmone (evento T).

RISPOSTA: $p = \frac{3}{22}$

2. - Ad un pronto soccorso, il numero di pazienti che arrivano tra le 6:00 e le 7:00 è un numero aleatorio con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 7$.

Determinare la probabilità α che in un determinato giorno tra le 6:00 e le 7:00 si presentino al pronto soccorso esattamente 4 pazienti. Qual è la probabilità β che si presentino almeno 2 pazienti ?

RISPOSTE: $\alpha = \dfrac{7^4}{4!}\, e^{-7}$; $\beta = 1 - 8e^{-7}$

3. - Ogni articolo elettronico prodotto da uno stabilimento è ispezionato indipendentemente da due ingegneri. Il tempo $T_i\,(i = 1, 2)$ che ciascun ingegnere impiega per ispezionare l'articolo ha una distribuzione esponenziale di parametro λ. Si denoti con S la proporzione, rispetto al tempo totale, del tempo di verifica del primo ingegnere, e sia $T = T_1 + T_2$ il tempo totale di ispezione dei due ingegneri.

Determinare la densità di probabilità di T e di S.

RISPOSTE: $f_T(t) = \begin{cases} \lambda^2 t e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$; $f_S(s) = \begin{cases} 1 & 0 \leq s \leq 1 \\ 0 & altrove \end{cases}$

4. - Un numero aleatorio Z è distribuito uniformemente sulla parte della circonferenza unitaria contenuta nel primo quadrante. Determinare la densità di probabilità del numero aleatorio $X = e^Z$.

RISPOSTA: $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi x} & 1 \leq x \leq e^{\pi/2} \\ 0 & altrove \end{cases}$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ 21 dicembre 2007

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. - Sia $h(x) = \lambda + cx^3$ per $x \geq 0$: determinare i valori di λ e c per i quali $h(x)$ è una funzione di rischio, e determinare la densità di probabilità del numero aleatorio X che rappresenta la durata del sistema.

$$\lambda \in [0, +\infty) \;\; c \in [0, +\infty) \;\; \setminus \{(\lambda = 0, c = 0)\} \qquad f(x) = \begin{cases} (\lambda + cx^3)e^{-\;\lambda x + c\frac{x^4}{4}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

2. - Un vettore aleatorio (X, Y) ha densità di probabilità

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} kx, & \text{per } (x, y) \in A\,; \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

dove A è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$. Calcolare la densità marginale di X, la funzione di ripartizione di Y e la probabilità dell'evento condizionato $E|H$, con $E = (X + Y + 1 > 0)$, $H = (X > \frac{1}{2})$.

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} y^3 & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad P(E|H) = 1$$

3. - Da un lotto contenente 2 pezzi difettosi e 8 buoni si estraggono senza restituzione 4 pezzi. Sia E_i = "l' i-esimo pezzo estratto è difettoso" e posto $X = \sum_{i=1}^{4} |E_i|$, calcolare la probabilità $p_2 = P(X = 2)$, la varianza di X e la probabilità α dell'evento condizionato $E_3|E_1$.

$$p_2 = \frac{2}{15} \qquad \text{var}(X) = \frac{32}{75} \qquad \alpha = \frac{1}{9}$$

4. - Un mezzo trasmissivo è in grado di trasmettere i simboli dell'alfabeto binario. Considerati gli eventi E = "si trasmette il simbolo 0" e H ="si riceve il simbolo 0" con $P(E) = \frac{1}{2}$, $P(H|E) = \frac{9}{10}$ e $P(H^c|E^c) = \frac{8}{10}$, determinare la probabilità α che sia trasmesso il simbolo 1 supposto che si riceva 0 ; inoltre calcolare la probabilità β di errore.

$$\alpha = \frac{2}{11} \qquad \beta = \frac{3}{20}$$

NOME E COGNOME :