CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 12 gennaio 2008

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati.

Elettronica (1^o Mod.): Es. $1-4$

Nettuno (PROBABILITA' E STATISTICA): Es. $1-3$

1. - Un lotto contiene 18 pezzi buoni e 2 pezzi difettosi. Si effettuano 3 estrazioni senza restituzione, e sia

E_i = pezzo difettoso alla i-esima estrazione (i=1,2,3).

Determinare i costituenti C_k (k=1,2, ..., s) relativi a questi eventi (s =?).

Posto $C_1 = E_1^c \wedge E_2^c \wedge E_3^c$, calcolare $P(C_1)$.

Suddividere i costituenti rimanenti in due sottofamiglie di costituenti C_k equiprobabili, e calcolare le probabilità p_1 e p_2 dei costituenti della prima e della seconda famiglia.

Verificare che $\sum_{k=1}^{s} P(C_k) = 1$.

RISPOSTE: $s = 7$; $P(C_1) = \frac{68}{95}$; $p_1 = \frac{1}{190}$; $p_2 = \frac{17}{190}$

2. - Un vettore aleatorio (X, Y) ha distribuzione uniforme su $\mathcal{C} = [1, 3] \times [0, 1]$. Calcolare le funzioni di ripartizione marginali F_X, F_Y e la probabilità dell'evento condizionato $E|H$, con $E = (Y - X < 0)$, $H = (X < 2)$.

RISPOSTE:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0\,, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-1)\,, & 1 < x \leq 3 \\ 1\,, & x > 3 \end{cases} \quad ; \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0\,, & y \leq 0 \\ y\,, & 0 < y \leq 1 \\ 1\,, & y > 1 \end{cases} \quad ; \quad P(E|H) = 1$$

3. - Dato un numero aleatorio X con distribuzione esponenziale di parametro λ, calcolare il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$, con $Y = 1 - \lambda X$, e la funzione di ripartizione $F_Y(y)$ di Y.

RISPOSTE: $\rho(X, Y) = -1$; $F_Y(y) = \begin{cases} e^{y-1}\,, & y < 1 \\ 1\,, & y \geq 1 \end{cases}$

4. - Si considerino n numeri aleatori $X_1, X_2, ..., X_n$, indipendenti e con lo stesso scarto standard $\sigma = 6$. Per quali valori di n il numero aleatorio

$$Z = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

ha varianza minore di 2 ?

RISPOSTE:

$var(Z) = \frac{36}{n}$; $n > 18$

CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 9 febbraio 2008

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati.

Elettronica (1^o Mod.): Es. $1-4$

Nettuno (PROBABILITA' E STATISTICA): Es. $1-3$

1. - Siano E, H eventi, con $P(E|H)=0.3$. Esistono valori coerenti di $P(E)$ tali che gli eventi E, H siano stocasticamente indipendenti? Il valore 0.4 rientra fra le valutazioni coerenti di $P(E\wedge H)$? Determinare una valutazione coerente di $P(E\wedge H)$ utilizzando il valore $P(E)$ determinato precedentemente ed assegnando a $P(H)$ il valore 0.5. .

RISPOSTE:

$P(E)=0.3$; $P(E\wedge H)=0.4$ è coerente? NO ; $P(E\wedge H)=0.15$

2. - Il numero X di chiamate telefoniche che arrivano in 1 ora ad un centralino segue la distribuzione di Poisson, e la probabilità che in tale intervallo di tempo non arrivi alcuna telefonata è uguale ad e^{-2}. Calcolare il numero medio Z di telefonate che arrivano al centralino fra le 10 e le 12.

RISPOSTA: $\mathbb{P}(Z)=4$

3. - Sia X un numero aleatorio con funzione di ripartizione

$$F(x)=\begin{cases} 0\,, & x<-1\\ 1/2\,, & -1\le x<1\\ 2/3\,, & 1\le x<3/2\\ 5/6\,, & 3/2\le x<2\\ 1\,, & x\ge 2\end{cases}$$

Determinare il suo codominio $\mathcal{C}_X$ e la probabilità degli eventi $\{X=\frac{7}{4}\}$, $\{X=2\}$.

RISPOSTE: $\mathcal{C}_X=\left\{-1,1,\frac{3}{2},2\right\}$; $P(X=\frac{7}{4})=0$; $P(X=2)=\dfrac{1}{6}$

4. - Dato un cerchio A di raggio π, riferito ad un sistema di assi cartesiani x,y con origine nel centro del cerchio, si consideri il vettore aleatorio (X,Y) con distribuzione uniforme su A. Indicata con $f(x,y)$ la densità congiunta, determinare le densità marginali e calcolare $\mathbb{P}(X)$ e $\mathbb{P}(Y)$. Calcolare anche la covarianza di X e Y e stabilire se X e Y sono indipendenti.

RISPOSTE:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi^3}\sqrt{\pi^2-x^2}\,, & x\in[-\pi,\pi]\\ 0\,, & \text{altrove}\end{cases}\quad ;\; f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi^3}\sqrt{\pi^2-y^2}\,, & y\in[-\pi,\pi]\\ 0\,, & \text{altrove}\end{cases}\quad ;$$

$$\mathbb{P}(X)=0 \quad ;\; \mathbb{P}(Y)=0 \quad ;\; cov(X,Y)=0 \quad ;$$

X, Y stocasticamente indipendenti? NO .

CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 19 Marzo 2008

Scrivere le risposte negli appositi spazi

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

Ingegneria Gestionale:1–4; Nettuno:1–3.

1. Data la funzione di ripartizione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{4}{5} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

del numero aleatorio X, determinare il codominio $\mathcal{C}_X$ di X e la probabilità dei seguenti eventi $E = (\frac{1}{2} \leq X \leq 2)$, $H = (1 \leq X \leq 3)$ e dell'evento condizionato $E|H$.

$\mathcal{C}_X = \{0, 1, 2, 3\}$; $\quad P(E) = \dfrac{11}{20}$; $\quad P(H) = \dfrac{3}{4}$; $\quad P(E|H) = \dfrac{11}{55}$.

2. Si considerino tre lotti di 10 pezzi aventi, rispettivamente, 4 pezzi buoni e 6 difettosi, 3 buoni e 7 difettosi, 5 buoni e 5 difettosi. Si sceglie a caso un lotto e da esso si estraggono **senza restituzione** 4 pezzi; sia E=" tutti i 4 pezzi estratti sono difettosi". Calcolare la probabilità p che sia stato scelto il primo lotto supposto che siano stati estratti 4 pezzi difettosi. Stabilire se l'evento E è stocasticamente indipendente dall'evento A_1 = "si sceglie il primo lotto".

$p = \frac{3}{11}$; $\quad E$ ed A_1 sono stocasticamente indipendenti? NO.

3. Sia X il numero di accessi a un calcolatore nell'intervallo di tempo $[0, T]$ e si supponga che X abbia distribuzione di Poisson di parametro 6. Calcolare il numero medio di accessi nell'intervallo $[0, T]$, la varianza di X e la probabilità α che il numero di accessi in $[0, T]$ sia inferiore o uguale a 3.

$\mathbb{P}(X) = 6$; $\quad var(X) = 6$; $\quad \alpha = 61e^{-6}$.

4. Un dispositivo elettronico è costituito da due componenti, A e B, connessi in serie le cui durate X e Y hanno entrambe funzione di rischio $h(t) = 3$ per $t > 0$. Assumendo X e Y stocasticamente indipendenti, calcolare la probabilità α dell'evento H="la durata del componente B è minore di quella del componente A", inoltre calcolare la probabilità β che il componente B duri più di 20 ore condizionatamente ad H. Determinare la funzione di rischio della durata di vita T del dispositivo elettronico.

$\alpha = \dfrac{1}{2}$; $\quad \beta = e^{-120}$; $\quad h_T(t) = 6$.