ANALISI MATEMATICA II (Ing. Clinica)
ESERCITAZIONE n.ro 3 A.A.2009/2010

---

1) Detto $D \subset \mathbb{R}^2$ il **dominio regolare** avente come frontiera l'**ellisse**

$$\mathcal{E} : x^2 + 4(y-2)^2 = 1 \quad i.e. \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 4(y-2)^2 \leq 1\} \tag{0.1}$$

e γ calcolare:

$$I_1 = \int_{+\partial D} 3x^2 y \, dx + x^3 \, dy \quad , \quad I_2 = \int_{\gamma} 3x^2 y \, dx + x^3 \, dy$$

ove $+\partial D$ indica il consueto verso di percorrenza antiorario e γ coincide con l'arco di ∂D che congiunge i punti $A \equiv (1,2)$ e $B \equiv (0, 3/2)$, nel verso da A a B.
L'integrale della stessa forma differenziale, esteso alla circonferenza di centro l'origine e raggio 5 assume lo stesso valore I_1: perchè?

2) Si calcoli il seguente integrale curvilineo

$$I = \int_{+\partial T} x^2 y \; dx + xy^2 \; dy,$$

ove $+\partial T$ è la frontiera, percorsa in verso antiorario, del dominio T (limitato) individuato nel piano xy dall'ellisse passante per i punti $(0,-1)$, $(0,1)$ $(-1/4,0)$ e $(1/4,0)$, simmetrica rispetto all'asse x. Verificare il risultato ottenuto mediante l'applicazione delle formule di Green-Gauss e, quindi, calcolando un opportuno integrale doppio esteso al dominio T.

3) Detto in T il dominio regolare di $\mathbb{R}^2$ limitato dall'ellisse (∂T) avente come assi di simmetria gli assi coordinati del piano xy e passante per i punti $(2,0)$ e $(0,1)$, si calcoli

$$I = \int_{+\partial T} \frac{x}{x^2+4y^2} \; dx + \frac{4y}{x^2+4y^2} \; dy \quad ,$$

ove $+\partial T$ indica il consueto verso di percorrenza antiorario. Calcolare l'integrale in due modi diversi e confrontare i risultati ottenuti.

2) Data la funzione di variabile complessa $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2}$, determinare:

a) l'insieme di definizione $E \subset \mathbb{C}$;

b) il campo di olomorfia della funzione $A \subset \mathbb{C}$;

c) calcolare l'integrale $I = \int_\gamma f(z)dz$ dove $\gamma : |z - i| = 2$.