ANALISI MATEMATICA II (Ing. Aerospaziale)
I canale (A–K) VI APPELLO 19.04.2013 A.A.2011/12

---

1) Data in $\mathbb{R}$ la funzione, di *periodo* $T = 4$ individuata in $[0, 4)$ da:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & x \in [0, 2], \\ x - 3 & x \in (2, 4), \end{cases}$$

si determini la serie di Fourier ad essa associata, precisando $\forall x \in [0, 4]$ il valore della somma di tale serie. In tale intervallo la convergenza è uniforme ? E in $\mathbb{R}$? Perchè ? Fornire adeguate motivazioni. **(7 punti)**

$$\textbf{Risultato} \quad \mathrm{f(x)} \;=\; \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos\left[\frac{(2m+1)\pi}{2}x\right] \;.$$

---

2) Calcolare il seguente integrale $\mathbf{I} = \iiint_D y^2\, dxdydz$, dove $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} \leq 1;\ y \geq 0\right\}$

$$\textbf{Risultato} \quad \mathbf{I} = \frac{4}{5}\pi$$

---

3) Data l'equazione differenziale:

$$y'' + 2\beta y' + 4y = e^{-2x} \quad , \quad \beta \in \mathbb{R}$$

determinarne l'integrale generale al variare di β. Trovare, inoltre, la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(7 punti)

Risultato

$$\begin{cases} y(x) = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} + \frac{1}{4(2-\beta)} e^{\alpha_1 x} & \beta \neq \pm 2, \qquad \alpha_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4} \\ y(x) = e^{2x}(c_1 + c_2 x) + \frac{1}{16} e^{-2x} & \beta = 2 \\ y(x) = e^{-2x}(c_1 + c_2 x + \frac{x^2}{2}) & \beta = -2 \qquad (Cauchy\ Pb. c_1 = 1,\ c_2 = 2) \end{cases}$$

---

4) Data la funzione $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = e^{-\frac{x^2}{2} + x + y^2}$ determinarne e classificarne i punti di stazionarietà nell'insieme $D = [0, 2] \times [-1, 1]$. Determinare inoltre $f(D) \subset \mathbb{R}$ e riconoscere che $f(D) = [m, M]$, dove m e M indicano rispettivamente il minimo e il massimo valore assunto da f in D.

Risultato

$P_1 \equiv (1, 0)$, unico punto di stazionarietà interno a D, è un *punto di sella,* $f(1, 0) = \sqrt{e}$.

$P_2 \equiv (0, 0)$ e $P_3 \equiv (2, 0)$ *punto di minimo assoluto* su $\partial D \Rightarrow m := min_{(x,y)\in\partial D} f(x, y) = 1$.

$P_4 \equiv (1, -1)$ e $P_5 \equiv (1, 1)$ *punto di massimo assoluto* su $\partial D \Rightarrow M|_{(x,y)\in\partial D} = e\sqrt{e}$.

Poichè l'unico punto di stazionarietà interno a D è un punto di sella, sia il minimo che il massimo valore di f è assunto su ∂D.

$f(D) = [1, e\sqrt{e}]$. N.B. $f(1, 0) = \sqrt{e}$, $\sqrt{e} \in (1, e\sqrt{e})$.