ESERCIZI DI ANALISI II

Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio

a.a. 2006/2007

1 FUNZIONI IN DUE VARIABILI

Insiemi di definizione

Determinare gli insiemi di definizione delle seguenti funzioni in due variabili e rappresentarli graficamente:

1. $f(x,y) = \frac{\sqrt{\log(x^2+y^2-15)}+7x^2-6x}{\sqrt{x^2-y^2-1}}$

2. $f(x,y) = \sqrt{\frac{-x^2+4-y}{1-x^2-y^2}}$

3. $f(x,y) = \log\left(\frac{x-y+2}{x^2-y}\right)$

4. $f(x,y) = \frac{y-x^2}{x^2+y^2+2}$

5. $f(x,y) = e^{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}$

6. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4} + \sqrt{xy-1} + 6 - x$

7. $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2-4}{4x^2+9y^2-36}}$

8. $f(x,y) = \log\left(\frac{4-x^2-y^2}{4x^2-9y^2-36}\right)$

Risultati degli esercizi sugli insiemi di definizione:
(1) Parte di piano esterna all'iperbole $x^2-y^2=1$ ed alla circonferenza (compresa) $x^2+y^2=16$ - (2) Parte di piano interna alla circonferenza $x^2+y^2=1$ ed esterna alla parabola (compresa) $y=-x^2+4$ - (3) Parte di piano esterna alla parabola $y=x^2$ nel semipiano inferiore alla retta $y=x+2$ e interna alla parabola nel semipiano superiore - (4) Tutto $\mathbb{R}^2$ - (5) Parte di piano nel primo e terzo quadrante compresa tra le due rette $y=x$ e $y=-x$ (comprese) - (6) Parte di piano esterna alla circonferenza $x^2+y^2=4$ e all'iperbole $xy=1$ (comprese) - (7) Parte di piano interna alla circonferenza $x^2+y^2=4$ (compresa) ed esterna all'ellisse $4x^2+9y^2=36$ - (8) Parte di piano compresa tra la circonferenza $x^2+y^2=4$ e l'ellisse $4x^2+9y^2=36$.

Limiti

Calcolare i seguenti limiti:

$$(1) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3 - x^2}{x^2y^2}$$
$$(2) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + xy^2 - 3x^2 - 3y^2}{x-3}$$
$$(3) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 - 5xy}{x^2 + y^2}$$
$$(4) \quad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^3 + 2y^2}{y^2 + |x-1|^3}$$
$$(5) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x+y} \sin\left(\frac{1}{xy}\right)$$
$$(6) \quad \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)^3 + (x-1)^2 + (y-2)^2}{x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5}$$
$$(7) \quad \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2(y-1)^3}{[x^2 + (y-1)^2]^{\frac{5}{2}}}$$
$$(8) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

Risultati degli esercizi sui limiti:
(1) $-\infty$ - (2) 0 - (3) Il limite non esiste - (4) Il limite non esiste (anche solo lungo l'asse x) - (5) 0 - (6) 1 - (7) Il limite non esiste - (8) Il limite non esiste.

Continuità

Determinare l'insieme di continuità delle seguenti funzioni in due variabili:

$$(1) \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
$$(2) \quad f(x,y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$
$$(3) \quad f(x,y) = \begin{cases} y^2 \arctan\left(\frac{1}{y}\right) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

$$(4)\quad f(x,y)=\begin{cases}\frac{\log(1+x^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{4}{5}}} & (x,y)\neq(0,0)\\ \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$(5)\quad f(x,y)=\begin{cases}|x|+y & x\neq 0\\ \\ 0 & x=0\end{cases}$$

$$(6)\quad f(x,y)=\begin{cases}x+2y-1 & x\neq 0\\ \\ 0 & x=0\end{cases}$$

Risultati degli esercizi sulla continuità:
(1) f continua in tutto $\mathbb{R}^2$ - (2) f continua in $\mathbb{R}^2\backslash\{(x,0),\ x\neq 0\}$ - (3) f continua in tutto $\mathbb{R}^2$ - (4) f continua in tutto $\mathbb{R}^2$ - (5) f continua in $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y),\ y\neq 0\}$ - (6) f continua in $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y),\ y\neq \frac{1}{2}\}$.

Regolarità

[1] Determinare gli insiemi di continuità, derivabilità e differenziabilità delle seguenti funzioni in due variabili:

$$(a)\quad f(x,y)=\begin{cases}\frac{1-\cos xy}{y} & y\neq 0\\ \\ 0 & y=0\end{cases}$$

$$(b)\quad f(x,y)=\begin{cases}(x^2-y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$(c)\quad f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$(d)\quad f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+|y|} & (x,y)\neq(0,0)\\ \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$(e)\quad f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+x^2y(y-1)+xy^2-y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$(f)\quad f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x+3y)^3}{\sqrt{x^2+y^2}}+\log(1+y^2) & (x,y)\neq(0,0)\\ \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

[2] Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità nell'origine delle seguenti funzioni al variare dei parametri reali che vi compaiono:

$$(a) \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{(e^{|xy|}-1)^\alpha}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$(b) \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{1+\alpha x+\beta y-e^{x+y}}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[3] Sia $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2y}$.
Stabilire se f è continua in $\mathbb{R}^2$. Calcolare le derivate parziali e le derivate direzionali lungo una generica direzione $\hat{v}$ nel punto $(1,2)$. Stabilire se la funzione è differenziabile nell'origine.

[4] Determinare l'equazione del piano tangente al grafico delle seguenti funzioni nel punto a fianco indicato:

(a) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y + 5xy^2 + y^3 \qquad P(0,1)$

(b) $f(x,y) = \arctan(x+2y) \qquad P(0,0)$

(c) $f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \qquad P(1,1)$

Risultati degli esercizi sulla regolarità:
[1]: (a) Si usa il limite notevole: $\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1}{2}$. La funzione risulta continua, derivabile e differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$ - (b) La funzione risulta continua, derivabile e differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$. Il limite per la differenziabilità si può fare con le maggiorazioni - (c) La funzione risulta continua in tutto $\mathbb{R}^2$. Nell'origine è derivabile parzialmente ma non è differenziabile (si può vedere facendo il limite lungo le rette passanti per l'origine) - (d) La funzione risulta continua, derivabile e differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$ - (e) La funzione risulta continua, derivabile e differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$ - (f) La funzione risulta continua, derivabile e differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.
[2]: (a) La funzione è continua solo per $\alpha > 1$ ed è derivabile con derivate parziali nulle per $\alpha > 0$. Inoltre è differenziabile per $\alpha > \frac{3}{2}$ - (b) La funzione non è continua per nessuna scelta dei parametri (si può vedere facendo il limite lungo l'asse x che vale $+\infty$ o $-\infty$ a seconda del segno di α con $\alpha \neq 1$ e di x, e vale $-\frac{1}{2}$ per $\alpha = 1$). Inoltre non essendo continua lungo gli assi non è neanche derivabile parzialmente (come funzione di una variabile lungo gli assi la non continuità implica la non derivabilità), e dunque non è neanche differenziabile nell'origine.
[3] La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}^2$ e differenziabile (e quindi derivabile) in tutto il piano privato degli assi. $f_x(1,2) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$ e $f_y(1,2) = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$. Nel punto $(1,2)$ la funzione è differenziabile e quindi le derivate direzionali lungo $\hat{v} = (v_1, v_2)$ sono $f_{\hat{v}}(1,2) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\, v_1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\, v_2$. Le derivate parziali nell'origine esistono e sono nulle ma f non è differenziabile nell'origine.
[4]: (a) $z = 5x + 3y - 2$ - (b) $z = x + 2y$ - (c) $z = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{5}{4}$.

Massimi e minimi

- Massimi e minimi liberi

Stabilire la natura dei punti stazionari e determinare i massimi e minimi liberi relativi e assoluti delle seguenti funzioni:

1. $f(x,y) = 25x^3 + 12y^3 - 75x^2 - 36y$
2. $f(x,y) = x^2 - xy^2 + x^2y$
3. $f(x,y) = (x-y)^2 - 2(x-y)$
4. $f(x,y) = x^2 \log(y-1) - 8y + y^2$
5. $f(x,y) = -\sin x \sin 2y$

- Massimi e minimi vincolati (metodo di sostituzione)

Determinare i massimi e i minimi assoluti vincolati delle seguenti funzioni nel dominio a fianco indicato:

1. $f(x,y) = x^2y + xy^2 + x^3 - x \qquad D = \{(x,y) : \ x \geq 0; \ y \geq 0; \ x+y \leq 4\}$
2. $f(x,y) = e^x + e^y \qquad D = \{(x,y) : \ x+y = 2\}$
3. $f(x,y) = \frac{(x-y)^2}{2} - \frac{(x+y)^3}{3} \qquad D = \{(x,y) : \ |y| \leq 1 - |x|\}$

- Massimi e minimi vincolati (metodo di Lagrange)

Determinare i massimi e i minimi assoluti vincolati delle seguenti funzioni nel dominio a fianco indicato:

1. $f(x,y) = x + 2y \qquad D = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 = 5\}$
2. $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2 \qquad D = \{(x,y) : \ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$
3. $f(x,y) = 2x^2 - 2y^2 + 22x \qquad D = \{(x,y) : \ x^2 + 7y^2 = 11\}$

Risultati degli esercizi sui massimi e minimi:

Massimi e minimi liberi: (1) La funzione è illimitata. $P_1(0,-1)$ è un punto di massimo relativo, $P_2(2,1)$ è un punto di minimo relativo, $P_3(0,1)$ e $P_4(2,-1)$ sono punti di sella - (2) La funzione risulta illimitata (si può vedere per esempio studiandone l'andamento lungo le rette passanti per l'origine). $P_1(0,0)$ e $P_2\left(-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ sono punti di sella (per P_1 si può vedere ad esempio studiando la funzione lungo l'asse x e lungo la curva $y = -\sqrt{x}$) - (3) La funzione risulta illimitata superiormente, ma è limitata inferiormente e tutti i punti del tipo $P(x, x-1)$ con $x \in \mathbb{R}$ sono punti di minimo relativo e assoluto (si noti che la verifica è immediata operando il cambio di variabile $t = x - y$) - (4) La funzione è definita per $y > 1$ e risulta illimitata come si può vedere ad esempio facendo il limite per y tendente a 1^+. $P_1(0,4)$ è un punto di minimo relativo, mentre $P_2(2,2)$ e $P_3(-2,2)$ sono punti di

sella - (5) La funzione è chiaramente limitata e tutti punti del tipo $P\left(k\frac{\pi}{2}, h\pi\right)$ con $h, k \in \mathbb{Z}$ sono punti di sella, mentre i punti del tipo $P\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{4}+h\frac{\pi}{2}\right)$ con $h, k \in \mathbb{Z}$ sono punti di massimo o di minimo relativo e assoluto a seconda del segno di $f_{xx}(x,y) = \sin x \sin 2y$.
Massimi e minimi vincolati (sostituzione): (1) La funzione ha un massimo nel punto $P(4,0)$ in cui vale 60 e infiniti minimi nei punti del segmento di estremi $(0,0)$ e $(0,4)$ in cui la funzione vale 0 - (2) La funzione ha il minimo nel punto $P(1,1)$ in cui vale $2e$ - (3) Si noti che il dominio è il quadrato di vertici $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$ e $(-1,0)$. La funzione ha un punto di sella nell'origine ed ha massimo nei punti $(0,-1)$ e $(-1,0)$ in cui vale $\frac{5}{6}$ e minimo nel punto $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ in cui vale $-\frac{1}{3}$. Si noti che l'esercizio si può risolvere anche operando il cambio di variabili $X = x - y$ e $Y = x + y$ rispetto a cui il dominio risulta $D = \{(X,Y) : |X| \le 1,\ |Y| \le 1\}$.
Massimi e minimi vincolati (Lagrange): (1) La funzione ha il massimo nel punto $(1,2)$ in cui vale 5 e il minimo nel punto $P(-1,-2)$ in cui vale -5 - (2) La funzione ha il massimo nel punto $(\frac{\sqrt{2}+2}{2}, \frac{\sqrt{2}+2}{2})$ in cui vale $2(\sqrt{2}-1)$ e il minimo nel punto $P(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2})$ in cui vale $-2(\sqrt{2}+1)$ - (3) La funzione ha il massimo nel punto $(\sqrt{11}, 0)$ in cui vale $22(1+\sqrt{11})$ e il minimo nel punto $(-\sqrt{11}, 0)$ in cui vale $22(1-\sqrt{11})$.

2 EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Equazioni lineari a coefficienti costanti

- Omogenee
Risolvere le seguenti equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti omogenee, e relativi problemi di Cauchy:

1. $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0$

2. $y''(x) - 2y'(x) = 0$

3. $\begin{cases} y''(x) + 9y'(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} y^{(IV)}(x) - 16y(x) = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} e^{2x} y(x) = 3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} y^{(IV)}(x) + 8y'(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} y(x) = 1 \end{cases}$

- Non omogenee

Risolvere le seguenti equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti non omogenee, e relativi problemi di Cauchy. Si ricorda che nel metodo di somiglianza il termine noto è del tipo speciale:
$f(x) = P^{(n)}(x)\ e^{\alpha x} \cos \beta x + Q^{(m)}(x)\ e^{\alpha x} \sin \beta x$.

1. $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = -3\cos 2x - 4\sin 2x$

2. $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = e^{-x}$

3. $y''(x) - 6y'(x) + 8y(x) = 3x^2 + 2x + 1$

4. $y''(x) + y(x) = 2\cos x$

5. $y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = xe^x$

6. $y''(x) - 2y'(x) = x - e^{3x}$

7. $\begin{cases} y''(x) + y'(x) = x^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} y''(x) - 8y'(x) + 16y(x) = e^{4x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} y''(x) - y'(x) = 2(1-x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} y'''(x) + 4y'(x) = \cos 2x \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$

11. $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{e^x}{x}$

12. $y''(x) + y(x) = \cos x + \frac{1}{\cos x}$

Risultati degli esercizi sulle EDO lineari a coefficienti costanti:

Omogenee: (1) $y(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{-x}$ - (2) $y(x) = c_1e^{2x} + c_2$ - (3) $y(x) = \cos 3x + \frac{2}{3}\sin 3x$ - (4) $y(x) = 2e^{2x}\sin x$ - (5) $y(x) = (-2x+1)e^{3x}$ - (6) $y(x) = \frac{1}{3}e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-x}$ - (7) Gli zeri del polinomio caratteristico sono 2, -2, $2i$ e $-2i$. La soluzione generica è $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x$. Imponendo la condizione richiesta, $\lim_{x\to+\infty}(c_1e^{4x} + c_2 + c_3e^{2x}\cos 2x + c_4e^{2x}\sin 2x) = 3$, deve essere $c_1 = 0$ perché e^{4x} ha limite infinito e $c_3 = c_4 = 0$ perché $e^{2x}\cos 2x$ e $e^{2x}\sin 2x$ non hanno limite. Risulta quindi $c_2 = 3$ e la soluzione del problema è $y(x) = 3e^{-2x}$ - (8) Gli zeri del polinomio caratteristico sono 0, -2, $1+i\sqrt{3}$ e $1-i\sqrt{3}$. La soluzione generica è $y(x) = c_1 + c_2e^{-2x} + c_3e^x\cos\sqrt{3}x + c_4e^x\sin\sqrt{3}x$. Imponendo la prima condizione si ha $c_1 + c_2 + c_3 = 0$, e imponendo la seconda $\lim_{x\to+\infty}(c_1 + c_2e^{-2x} + c_3e^x\cos\sqrt{3}x + c_4e^x\sin\sqrt{3}x) = 1$, deve essere $c_3 = c_4 = 0$ perché $e^x\cos\sqrt{3}x$ e $e^x\sin\sqrt{3}x$ non hanno limite e risulta quindi $c_1 = 1$. La soluzione del problema è $y(x) = 1 - e^{-2x}$

Non omogenee: (1) Con metodo di somiglianza, il termine noto è di tipo speciale con $\alpha = 0$ e $\beta = 2$. $\alpha + i\beta$ non è soluzione del polinomio caratteristico e quindi una soluzione particolare è del tipo $y_p(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$. La soluzione è $y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + \cos 2x$ - (2) Con metodo di somiglianza, il termine noto è di tipo speciale con $\alpha = -1$ e $\beta = 0$. $\alpha + i\beta$ è soluzione semplice del polinomio caratteristico e quindi una soluzione particolare è del tipo $y_p(x) = Axe^{-x}$. La soluzione è $y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + xe^{-x}$ - (3) Con metodo di somiglianza, il termine noto è di tipo speciale con $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. $\alpha + i\beta$ non è soluzione del polinomio caratteristico e quindi una soluzione particolare è del tipo $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$. La soluzione è $y(x) = c_1e^{4x} + c_2e^{2x} + \frac{3}{8}x^2 + \frac{13}{16}x + \frac{41}{64}$ - (4) Con metodo di somiglianza, il termine noto è di tipo speciale con $Q(x) = 0$, $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. $\alpha + i\beta$ è soluzione del polinomio caratteristico e quindi una soluzione particolare è del tipo $y_p(x) = x[A\cos x + B\sin x]$. La soluzione è $y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + x\sin x$ - (5) Con metodo di somiglianza, il termine noto è di tipo speciale con $P(x) = x$, $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. $\alpha + i\beta$ non è soluzione del polinomio caratteristico e quindi una soluzione particolare è del tipo $y_p(x) = (Ax+B)e^x$. La soluzione è $y(x) = c_1e^{-x}\cos x + c_2e^{-x}\sin x + \frac{1}{5}(x - \frac{4}{5})e^x$ - (6) Si applica il principio di sovrapposizione. Per $f_1(x) = x$ si trova una soluzione particolare della forma $y_{p_1}(x) = x(Ax + B)$ e per $f_2(x) = -e^{3x}$ si trova una soluzione particolare della forma $y_{p_2}(x) = Ae^{3x}$. La soluzione è $y(x) = c_1 + c_2e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}e^{3x}$ - (7) 0 è soluzione semplice del polinomio caratteristico, quindi una soluzione particolare è del tipo $y_p(x) = x(Ax^2 + Bx + C)$. La soluzione è $y(x) = 2e^{-x} - 1 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x$ - (8) $\alpha + i\beta = 4$ è soluzione doppia del polinomio caratteristico, quindi una soluzione particolare è del tipo $y_p(x) = Ax^2e^{4x}$. La soluzione è $y(x) = (\frac{1}{2}x^2 + x)e^{4x}$ - (9) 0 è soluzione semplice del polinomio caratteristico, quindi una soluzione particolare è del tipo $y_p(x) = x(Ax + B)$. La soluzione è $y(x) = e^x + x^2$ - (10) $\alpha + i\beta = 2i$ è soluzione del polinomio caratteristico, quindi una soluzione particolare è del tipo $y_p(x) = Ax\cos 2x + Bx\sin 2x$. La soluzione è $y(x) = \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{8}x\cos 2x$ - (11)

Il termine noto non è di tipo speciale. Si procede con metodo della variazione delle costanti. La soluzione è $y(x) = c_1e^x + c_2xe^x - xe^x + xe^x \log|x|$ - (12) Si applica il principio di sovrapposizione. Per $f_1(x) = \cos x$ si trova una soluzione particolare della forma $y_{p_1}(x) = x(A\cos x + B\sin x)$ e per $f_2(x) = \frac{1}{\cos x}$ si procede con metodo della variazione delle costanti. La soluzione è $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \log|\cos x| + \frac{3}{2}x\sin x$.

Equazioni lineari del primo ordine

Risolvere le seguenti equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine e i problemi di Cauchy, specificando l'insieme su cui è definita la soluzione:

1. $y'(x) + \tan x\ y(x) = \sin 2x$
2. $\sqrt{1-x^2}\ y'(x) + y(x) = \arcsin x$
3. $y'(x) + \frac{2y(x)}{x} = x^3$
4. $y'(x)\ \cos^2 x + y(x) = \tan x$
5. $\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 3\,e^{-2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$
6. $\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x} = e^x \\ y(1) = 2 \end{cases}$ Calcolare $\lim_{x\to 0^+} x\,y(x)$
7. $\begin{cases} y'(x) - 7y(x) = -8e^{3x} \\ y(0) = 3 \end{cases}$ Calcolare $y'(0) - y(0)$
8. $\begin{cases} y'(x) + \frac{n}{x}\,y(x) = \frac{a}{x^n} \\ y(1) = 0 \end{cases}$
9. $\begin{cases} xy'(x) + y(x) - e^x = 0 \\ y(a) = b \end{cases}$

Risultati degli esercizi sulle equazioni lineari del primo ordine: (1) $y(x) = -2\cos^2 x + c\cos x$ in $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}+k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ - (2) $y(x) = c\, e^{-\arcsin x} + \arcsin x - 1$ in $(-1, 1)$ - (3) $y(x) = \frac{1}{6}x^4 + \frac{c}{x^2}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ - (4) $y(x) = c\, e^{-\tan x} + \tan x - 1$ in $\mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{4}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ - (5) L'equazione è in particolare a coefficienti costanti: l'omogenea si può risolvere col polinomio caratteristico oppure con la separazione delle variabili e la non omogenea col metodo di somiglianza o con la variazione delle costanti. $y(x) = e^{-2x}(3x + 1)$ in $\mathbb{R}$ - (6) $y(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^x + \frac{2}{x}$ in $(0, +\infty)$. Il limite richiesto vale 1 - (7) L'equazione è in particolare a coefficienti costanti: l'omogenea si può risolvere col polinomio caratteristico oppure con la separazione delle variabili e la non omogenea col metodo di somiglianza o con la variazione delle costanti. $y(x) = 2e^{3x} + e^{7x}$ in $\mathbb{R}$. $y'(0) - y(0)$ vale 10 e si può ricavare derivando la soluzione oppure, più velocemente, direttamente dall'equazione - (8) $y(x) = \frac{a(x-1)}{x}$ in $(0, +\infty)$ - (9) $y(x) = \frac{e^x + ab - e^a}{x}$ in $(0, +\infty)$ se $a > 0$ e in $(-\infty, 0)$ se $a < 0$.

Equazioni del primo ordine a variabili separabili

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy per equazioni differenziali ordinarie del primo ordine a variabili separabili, specificando l'insieme su cui è definita la soluzione, discutendo l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale:

1. $$\begin{cases} y'(x) = 2xy^2(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} y'(x) = \frac{x}{y(x)} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} y'(x) = 3\cos^2 x \sin x \; y^2(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} y'(x) = x^2(2e^{-y(x)} - 1) \\ y(0) = \log 3 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} y'(x) = e^{2x-3y(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Risultati degli esercizi sulle equazioni a variabili separabili:
Si fa riferimento alla notazione $y'(x) = f(x, y)$. (1) $f(x, y) = 2xy^2$ è continua sia in un rettangolo che in una striscia contenente $(0, 1)$, ma la derivata $f_y(x, y) = 4xy$, che è continua nel rettangolo, non è limitata nella striscia. Pertanto vale solo il teorema di esistenza e unicità locale. $y(x) = \frac{1}{1-x^2}$ per $x \in (-1, 1)$ - (2) $f(x, y) = \frac{x}{y}$ è continua in un rettangolo contenente $(0, -1)$ con y lontano da 0, ma non in una striscia e la derivata $f_y(x, y) = -\frac{x}{y^2}$ è continua nel rettangolo, ma non è limitata nella striscia. Pertanto vale solo il teorema di esistenza e unicità locale. Per prolungamento si trova lo stesso una soluzione globale $y(x) = -\sqrt{1 + x^2}$ per $x \in \mathbb{R}$ - (3) $f(x, y) = 3\cos^2 x \sin x\ y^2$ è continua sia in un rettangolo che in una striscia contenente $(0, 1)$, ma la derivata $f_y(x, y) = 6\cos^2 x \sin x\ y$, che è continua nel rettangolo, non è limitata nella striscia. Pertanto vale solo il teorema di esistenza e unicità locale. $y(x) = \frac{1}{\cos^3 x}$ per $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ - (4) $f(x, y) = x^2(2e^{-y} - 1)$ è continua sia in un rettangolo che in una striscia contenente $(0, \log 3)$, ma la derivata $f_y(x, y) = -2x^2e^{-y}$, che è continua nel rettangolo, non è limitata nella striscia. Pertanto vale solo il teorema di esistenza e unicità locale. Per prolungamento si trova lo stesso una soluzione globale $y(x) = \log(2 + e^{-\frac{x^3}{3}})$ per $x \in \mathbb{R}$ - (5) $f(x, y) = e^{2x-3y}$ è continua sia in un rettangolo che in una striscia contenente $(0, 0)$, ma la derivata $f_y(x, y) = -3e^{2x-3y}$, che è continua nel rettangolo, non è limitata nella striscia. Pertanto vale solo il teorema di esistenza e unicità locale. $y(x) = \frac{1}{3}\log\left(\frac{3e^{2x}-1}{2}\right)$ per $x \in (-\frac{\log 3}{2}, +\infty)$.

Equazioni di Bernoulli

Risolvere le seguenti equazioni differenziali ordinarie di Bernoulli:

1. $\begin{cases} y'(x) = xy(x) + x\sqrt{y(x)} \\ y(1) = 1 \end{cases}$
2. $xy'(x) + y(x) = y^2 \ln x$
3. $y'(x) - y(x)\tan x + y^2 \cos x = 0$
4. $y'(x) + \frac{2y(x)}{x} = \frac{2\sqrt{y(x)}}{\cos^2 x}$
5. $y'(x) = \frac{4y(x)}{x} + x\sqrt{y(x)}$

Risultati degli esercizi sulle equazioni di Bernoulli:
(1) $y(x) = (2e^{\frac{x^2-1}{4}} - 1)^2$ per $x \in \mathbb{R}$ - (2) $y(x) = \frac{1}{1+\ln x + cx}$ con $x > 0,\ 1 + \ln x + cx \neq 0$ - (3) $y(x) = \frac{1}{(x+c)\cos x}$ per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x + c \neq 0$ - (4) $y(x) = \left(\frac{c+\ln|\cos x|}{x} + \tan x\right)^2$ con $x \neq 0$ e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ - (5) $y(x) = x^4(\frac{1}{2}\ln|x| + c)^2$ con $x \neq 0$.

3 FORME DIFFERENZIALI E CAMPI VETTORIALI

Forme differenziali e campi vettoriali in $\mathbb{R}^2$

1. Data la forma differenziale $\omega(x, y) = e^y\, dx + (1 + e^y)\, dy$, calcolare il suo integrale sulla curva di equazione $y = x^2 + e^x \cos x$ fra i punti di ascissa $x = 0$ e $x = 1$.

2. Determinare $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ con $\varphi(0) = 0$ tale che la forma differenziale
$$\omega(x, y) = [2x + \varphi(y)]\, dx + [x(y - \varphi(y))]\, dy$$
sia esatta e calcolarne la primitiva che si annulla nell'origine.

3. Trovare tutte le funzioni $a, b \in C^1(\mathbb{R})$ tali che la forma differenziale
$$\omega(x, y) = a(y)\, dx + b(x)\, dy$$
sia esatta e calcolarne le primitive.

4. Sia γ l'arco dell'ellisse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ tra i punti $A(-3, 0)$ e $B(0, 2)$ percorso in verso antiorario. Calcolare
$$\int_\gamma \left(\frac{2x}{1 + (x^2 + y)^2} + \frac{1}{2\sqrt{10 + x}} \right) dx + \frac{1}{1 + (x^2 + y)^2}\, dy$$

5. Sia γ la curva definita da $\gamma(t) = (1 - t^2\, ;\, t^6) \quad t \in [0, 1]$. Calcolare
$$\int_\gamma \frac{x}{x^2 + 4y^2}\, dx + \frac{4y}{x^2 + 4y^2}\, dy$$

6. Stabilire quanto vale l'integrale della forma differenziale
$$\omega = \frac{2x(y + 1)\, dx + (2x^2 - 5y^3 - 3y^2)\, dy}{2\sqrt{x^2 - y^3}}$$
sulle curve congiungenti i punti $P(0, -1)$ e $Q(2, 1)$.

7. Sia γ la frontiera del dominio $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq (x - 8)^2 + y^2 \leq 2\}$. Calcolare
$$\int_{+\gamma} f(\log^2(x + y))\, dx + f(\log^2(x + y))\, dy$$
dove f è una funzione di classe $C^1([0, \infty))$.

8. Determinare le regioni del piano su cui è esatta la forma

$$\omega = \left(2xy - \frac{1}{x}\right) dx + x^2\, dy$$

e determinare le primitive di ω su tali regioni.

9. Sia $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{2xy}{(1+x^2)^2}\,;\, -\frac{1}{1+x^2}\right)$$

Dire se $\vec{F}$ è conservativo e in caso affermativo determinare il potenziale.

10. Siano $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y) = (e^x[\sin(x+y) + \cos(x+y)]\,;\, e^x \cos(x+y))$$

e $\gamma_n : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ le curve definite da $\gamma_n(t) = (\cos nt\,;\, \sin nt)$ con $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$. Dire se $\vec{F}$ è conservativo e in caso affermativo determinare il potenziale. Calcolare inoltre il lavoro di $\vec{F}$ lungo γ_n.

11. Sia $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y) = \big(3x^2 + y\,;\, x + 2y\big)$$

Dire se $\vec{F}$ è conservativo e in caso affermativo determinare il potenziale.

12. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ si annulla il lavoro del campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\vec{F}(x, y) = (2x^2 + y^2\,;\, axy)$$

sulla curva $\gamma(t) = (\cos t\,,\, \sin t)$ con $t \in [0,\, 2\pi]$.

Risultati degli esercizi su forme differenziali e campi vettoriali in $\mathbb{R}^2$: Le costanti che compaiono vanno intese in $\mathbb{R}$.
(1) Il calcolo diretto dell'integrale non è agevole, ma la forma è esatta. Calcolando la differenza dei valori di una primitiva agli estremi $(1, 1+e\cos 1)$ e $(0, 1)$, l'integrale vale $e\cos 1 + e^{1+e\cos 1}$ - (2) La condizione di chiusura dà $\varphi'(y) = y - \varphi(y)$. Risolvendo questa equazione differenziale con $\varphi(0) = 0$, si ottiene $\varphi(y) = e^{-y} + y - 1$. La primitiva di ω che si annulla nell'origine è $f(x, y) = x^2 + x(e^{-y} + y - 1)$ - (3) La condizione di chiusura dà $a_y(y) = b_x(x)$ che è possibile solo se sono costanti $a_y(y) = b_x(x) = C$. Si trova quindi $a(y) = Cy + c_1$ e $b(x) = Cx + c_2$. Le primitive di ω sono $f(x, y) = Cxy + c_1x + c_2y + c$ - (4) L'arco di ellisse è contenuto nel semipiano $x > -10$ dove la forma è definita ed esatta. L'integrale si può calcolare

direttamente parametrizzando la curva oppure con la differenza dei valori di una primitiva agli estremi. L'integrale risulta $\arctan 2 + \sqrt{10} - \arctan 9 - \sqrt{7}$ - (5) La curva γ non passa per l'origine, dove la forma non è definita. Si può calcolare l'integrale direttamente oppure sfruttando il fatto che la forma è chiusa in $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Questo dominio non è semplicemente connesso e dunque non si può concludere che la forma sia esatta in tutto $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, ma la forma è localmente esatta in domini semplicemente connessi lontano dall'origine. Si può quindi trovare una primitiva e calcolarne la differenza agli estremi. L'integrale vale $\log 2$ - (6) La forma è definita e chiusa nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < \sqrt[3]{x^2}\}$ che è semplicemente connesso. Le primitive sono $f(x,y) = (y+1)\sqrt{x^2 - y^3} + c$ e l'integrale vale $f(2,1) - f(0,-1) = 2\sqrt{3}$, ma solo lungo le curve congiungenti P e Q aventi il supporto contenuto in E - (7) La forma è definita e chiusa nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$ che è semplicemente connesso e quindi è esatta. Poiché T è una corona circolare tutta contenuta in E, l'integrale della forma sulla sua frontiera è nullo - (8) La forma è esatta su $\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ e $\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Le primitive sono $f(x,y) = x^2 y - \log(-x) + c$ in Ω_1 e $f(x,y) = x^2 y - \log x + c$ in Ω_2 - (9) Il campo risulta irrotazionale in tutto $\mathbb{R}^2$ e quindi è conservativo. Il potenziale è $U(x,y) = -\frac{y}{1+x^2} + c$ - (10) Il campo risulta conservativo in $\mathbb{R}^2$ e il potenziale è $U(x,y) = e^x \sin(x+y) + c$. Le curve γ_n sono chiuse per n pari e quindi il lavoro è nullo. Per n dispari il lavoro vale $U(-1,0) - U(1,0) = -(e + e^{-1}) \sin 1$ - (11) Il campo risulta irrotazionale in tutto $\mathbb{R}^2$ e quindi è conservativo. Il potenziale è $U(x,y) = x^3 + xy + y^2 + c$ - (12) Calcolando l'integrale di $\vec{F}$ lungo γ tramite la definizione, si trova che l'integrale è nullo per ogni valore di a reale.

Forme differenziali e campi vettoriali in $\mathbb{R}^3$

1. Trovare tutte le funzioni $a(x,y,z) \in C^1(\mathbb{R}^3)$ tali che la forma

$$\omega(x,y,z) = y\,dx + x\,dy + a(x,y,z)\,dz$$

   sia esatta e calcolare le primitive.

2. Trovare tutte le funzioni $A(x,y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tali che la forma differenziale

$$\omega(x,y,z) = 2xz\,dx + yz\,dy + A(x,y)\,dz$$

   sia esatta e calcolare le primitive.

3. Sia $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = (2y+1\,;\,2x-1\,;\,2z)$$

   Dire se $\vec{F}$ è conservativo e in caso affermativo determinare il potenziale.

4. Siano
$$\vec{F} = (y^2z^2\,,\, z^2x^2\,,\, x^2y^2) \qquad \text{e} \qquad \mu(x,y,z) = (xyz)^\alpha$$
Determinare il valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che il prodotto $\mu(x,y,z)\vec{F}(x,y,z)$ sia un campo conservativo e determinare il potenziale.

5. Sia $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale
$$\vec{F}(x,y,z) = (y+z\,;\, x+z\,;\, x+y)$$
e γ il bordo di $D = \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\,,\; x+y+z=0\}$. Dire se $\vec{F}$ è conservativo e in caso affermativo determinare il potenziale. Calcolare il lavoro di $\vec{F}$ lungo γ.

6. Sia $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale
$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{(2x\,;\,1\,;\,4z)}{x^2+y+2z^2+1}$$
Calcolare il lavoro lungo la curva $\gamma(t) = (t, t^3, t^2)$ con $t \in [0,2]$.

7. Sia $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale
$$\vec{F}(x,y,z) = (2x^2y\,;\, zx\,;\, -x)$$
Calcolare il lavoro lungo $\gamma(t) = (1+\cos t, \sin t, -2\sin^2 t)$ con $t \in [0, 2\pi]$.

8. Sia $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale
$$\vec{F}(x,y,z) = (y-z\,;\, z-x\,;\, x-y)$$
Calcolare il lavoro lungo $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ con $t \in [0, 2\pi]$, $a, b > 0$.

Risultati degli esercizi su forme differenziali e campi vettoriali in $\mathbb{R}^3$: Le costanti che compaiono vanno intese in $\mathbb{R}$.
(1) Si vede che la forma è chiusa e quindi esatta in $\mathbb{R}^3$ se e solo se $a(x,y,z) = a(z)$. Le primitive sono $f(x,y,z) = xy + \int a(z)\,dz$ - (2) Si vede che la forma è chiusa e quindi esatta in $\mathbb{R}^3$ se e solo se $A(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{2} + C$. Le primitive sono $f(x,y,z) = x^2z + \frac{1}{2}y^2z + Cz + c$ - (3) Il campo vettoriale è irrotazionale su $\mathbb{R}^3$ e dunque è conservativo. Il potenziale è $U(x,y,z) = (2y+1)x - y + z^2 + c$ - (4) Si vede che il campo vettoriale $\vec{F} = (\mu(x,y,z)y^2z^2\,,\, \mu(x,y,z)z^2x^2\,,\, \mu(x,y,z)x^2y^2)$ è irrotazionale se e solo se $\alpha = -2$ per cui si ottiene $\mu\vec{F} = (\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}, \frac{1}{z^2})$, conservativo fuori dai piani coordinati. Il potenziale è $U(x,y,z) = -(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}) + c$ - (5) Il campo vettoriale è irrotazionale su $\mathbb{R}^3$ e dunque è conservativo. Il potenziale è $U(x,y,z) =$

$xy+xz+yz+c$ e il lavoro lungo γ è nullo essendo γ una curva chiusa - (6) Il campo vettoriale è definito per $y \neq -x^2 - 2z^2 - 1$ e γ è una curva regolare contenuta nel dominio di $\vec{F}$. Si può calcolare l'integrale tramite la definizione e vale $\log 45$ - (7) Il campo non è conservativo. Calcolando l'integrale tramite la definizione, il lavoro lungo γ è -3π - (8) Il campo non è conservativo. Calcolando l'integrale tramite la definizione, il lavoro lungo γ è $-2\pi a(a+b)$.

4 INTEGRALI MULTIPLI

Integrali doppi su domini normali

Calcolare i seguenti integrali doppi su unioni di domini normali rispetto a x o y:

1. $\displaystyle\iint_D \frac{2x}{4-y}\, dx\, dy$
   $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\,;\, x^2 \leq y \leq \min\{\,2x\,;\,1\}\}$
2. $\displaystyle\iint_D |x+y|\, e^{x-y}\, dx\, dy$
   D è il triangolo di vertici $O(0,0),\ A(1,1),\ B(1,-2)$
3. $\displaystyle\iint_D x\, \sin^2(x+y)\, dx\, dy$
   $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 0\,;\, |x+y\,| \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$
4. $\displaystyle\iint_D (x-y^2)\, dx\, dy$
   D è il triangolo di vertici $O(0,0),\ A(1,1),\ B(2,-1)$
5. $\displaystyle\iint_D \frac{dx\, dy}{1+x}$
   $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\,;\, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\right\}$
6. $\displaystyle\iint_D e^{\frac{y}{x}}\, dx\, dy$
   $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2\,;\, \dfrac{y}{2} \leq x \leq \min\{\,y\,;\,1\}\}$
7. $\displaystyle\iint_D \frac{x\sqrt{|y|}}{1+\sqrt{|y|}}\, dx\, dy$
   $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\,;\, -1 \leq y \leq 2\right\}$
8. $\displaystyle\iint_D |x-y|\, dx\, dy$
   $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\,;\, x^2 \leq y \leq 1\right\}$

9. $\displaystyle\iint_D x^2y^2\ dx\,dy$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| + |y| \leq 1\}$

10. $\displaystyle\iint_D x^2\ dx\,dy$

$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \leq -x^2 + \dfrac{x}{2} + 3\,;\ y \geq -x^2 - x\,;\ y \geq -x^2 + 2x\right\}$

11. $\displaystyle\iint_D y\ dx\,dy$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 4x^2 + 9y^2 \geq 36\,;\ y \geq 0\}$

Risultati degli esercizi sugli integrali doppi su domini normali:
(1) $\frac{1}{8}$ - (2) $e^2 - \frac{e^3+23}{9}$ - (3) $-\frac{\pi^3}{16}$ - (4) $\frac{5}{4}$ - (5) $\frac{5}{2} - \frac{\pi}{2} - \log 2$ - (6) $\frac{e^2-e}{2}$ - (7) $\frac{1}{2} - \sqrt{2} + \log(2+2\sqrt{2})$ - (8) $\frac{11}{60}$ - (9) $\frac{1}{45}$ - (10) 4 - (11) Con coordinate ellittiche $x = 3\rho\cos\theta,\ \ y = 2\rho\sin\theta$ con $\rho \in [0,1]$ e $\theta \in [0,2\pi]$, si trova che l'integrale vale 8.

Integrali doppi con coordinate polari

Calcolare i seguenti integrali doppi con coordinate polari:

1. $\displaystyle\iint_D \frac{x}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0\,;\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$

2. $\displaystyle\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}\,e^{x\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq 0\,;\ x^2+y^2 \leq 1\}$

3. $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x}\,\frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq y \geq 0\,;\ x^2+y^2 \leq 1\}$

4. $\displaystyle\iint_D \frac{y}{1+x^2+y^2}\,\frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \leq 0\,;\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 3\}$

5. $\displaystyle\iint_D \frac{ye^x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$ e $\displaystyle\iint_D \frac{ye^{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq x\,;\ x \geq 0\,;\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\} \cup$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -\sqrt{3}x \leq y\,;\ x \leq 0\,;\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$

6. $\displaystyle\iint_D x\,dx\,dy$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \leq -|y|\,;\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\}$

7. $\displaystyle\iint_D |xy|\,dx\,dy$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 1\}$

8. $\displaystyle\iint_D xy\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \ge 0\,;\ x^2-2x+y^2 \le 0\}$

9. $\displaystyle\iint_D y\,dx\,dy$

D è la metà superiore del cerchio di centro $\dfrac{a}{2}$ $(a>0)$ passante per $(0,0)$

Risultati degli esercizi sugli integrali doppi con coordinate polari: (1) $2[1-\arctan 2+\arctan 1]$ - (2) $\frac{e+e^{-1}}{2}$ - (3) $\frac{\log^2 2}{4}$ - (4) $-\frac{\pi}{6}$ - (5) Il primo integrale vale $2e^{-1}+\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}-2e^{-\frac{1}{2}}-\sqrt{2}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ e il secondo integrale vale $\frac{3}{2}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ - (6) $-\frac{1}{3}(4-\sqrt{2})$ - (7) $\frac{1}{2}$ - (8) $\frac{32}{35}$ - (9) $\frac{a^3}{12}$.

Integrali tripli

Calcolare i seguenti integrali tripli:

1. $\displaystyle\iiint_D x^2\,dx\,dy\,dz$

$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \le 1\right\} \quad a,b,c>0$

2. $\displaystyle\iiint_D dx\,dy\,dz$

$D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 1 \le x^2+y^2 \le 4\,;\ 0 \le z \le x^2+y^2\big\}$

3. $\displaystyle\iiint_D z^2\,dx\,dy\,dz$

$D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\,;\ z \ge x^2+y^2\,;\ z \ge 0\big\}$

4. $\displaystyle\iiint_D (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$

$D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le x \le 1\,;\ 2x \le y \le x+1\,;\ 0 \le z \le x+y\big\}$

5. Determinare il valore di $r>0$ tale che valga $\dfrac{\pi}{8}$ l'integrale

$\displaystyle\iiint_D dx\,dy\,dz$

$D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \ge r^2\,;\ x^2+y^2 \le z \le 1\big\}$

6. $\displaystyle\iiint_D xyz^2\,dx\,dy\,dz$

$D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le x \le 1\,;\ -x \le z \le x\,;\ x+z \le y \le 4\big\}$

Risultati degli esercizi sugli integrali tripli:
(1) Usando coordinate ellittiche $x = a\rho\sin\varphi\cos\vartheta$, $y = b\rho\sin\varphi\sin\vartheta$, $z = c\rho\cos\varphi$ con $\rho \in [0,1]$, $\varphi \in [0,\pi]$ e $\vartheta \in [0,2\pi]$, e ricordando che il determinante della matrice jacobiana è $abc\rho^2\sin\varphi$, si trova che l'integrale vale $\frac{4}{15}\,\pi\, a^3bc$ - (2) L'integrale proposto è il volume del solido D. Usando le coordinate cilindriche $x = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho\sin\vartheta$, $z = z$ con $\rho \in [1,2]$, $\vartheta \in [0,2\pi]$ e $z \in [0,\rho^2]$, e ricordando che il determinante della matrice jacobiana è ρ, si trova che l'integrale vale $\frac{15}{2}\,\pi$ - (3) Usando coordinate sferiche $x = \rho\sin\varphi\cos\vartheta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta$, $z = \rho\cos\varphi$ con $\rho \in [1,2]$, $\varphi \in [0,\frac{\pi}{4}]$ e $\vartheta \in [0,2\pi]$, e ricordando che il determinante della matrice jacobiana è $\rho^2\sin\varphi$, si trova che l'integrale vale $\frac{31}{30}\,\pi\,(4-\sqrt{2})$ - (4) Considerando il dominio normale rispetto al piano xy l'integrale diventa un integrale in dz tra 0 e $x+y$ dell'integrale doppio su $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1\,;\, 2x \le y \le x+1\right\}$, e risulta $\frac{13}{8}$ - (5) Si vede che deve essere $0 < r < 1$. Considerando il dominio normale rispetto al piano xy l'integrale diventa un integrale in dz tra r^2 e 1 dell'integrale doppio sulla corona circolare $r^2 \le x^2+y^2 \le 1$, e risulta $\frac{\pi}{2}(1-r^2)^2$. Imponendo che valga $\frac{\pi}{8}$ si trova $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ - (6) L'integrale si può scrivere $\int_0^1 \left(\int_{-x}^{x}\left(\int_{x+z}^{4} xyz^2\,dy\right)dz\right)dx$ e vale $\frac{104}{105}$.

5 SUPERFICI

Calcolare i seguenti integrali superficiali:

1. $$\int_\Sigma z^2\,d\sigma$$
   $$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = xy;\ 0 \le y \le \sqrt{3}x;\ x^2+y^2 \le 1\right\}$$
2. $$\int_\Sigma (x^2+y^2)\,d\sigma$$
   $$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = \sqrt{x^2+y^2};\ x^2+y^2 \le 1\right\}$$
3. $$\int_\Sigma \frac{x^2+y^2}{z^3}\,d\sigma$$
   $$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x,y,z) = (\sin(uv);\,\cos(uv);\,u);\ (u,v) \in \Omega\right\}$$
   $$\Omega = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{1}{2} \le u \le v;\ v \le 1\right\}$$
4. $$\int_\Sigma \frac{1}{4z+1}\,d\sigma$$
   $$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = x^2+y^2;\ x^2+y^2 \le 1\right\}$$

Risultati degli esercizi sugli integrali superficiali:
(1) La parametrizzazione di Σ è $\varphi(u,v) = (u, v, uv)$ con $(u,v) \in \Omega$ dove Ω è il dominio $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq v \leq \sqrt{3}u;\ u^2+v^2 \leq 1\}$. L'integrale diventa $\int_\Omega u^2v^2\|\vec{N}(u,v)\|\, dudv$ con $\|\vec{N}(u,v)\| = \sqrt{1+u^2+v^2}$ e può essere calcolato passando a coordinate polari. Il risultato è $\frac{1}{420}(11\sqrt{2}-4)(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{8})$ - (2) La parametrizzazione di Σ è $\varphi(u,v) = (u, v, \sqrt{u^2+v^2})$ con $(u,v) \in \Omega$ dove Ω è il dominio $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \leq 1\}$. L'integrale diventa $\int_\Omega (u^2+v^2)\|\vec{N}(u,v)\|\, dudv$ con $\|\vec{N}(u,v)\| = \sqrt{2}$ e può essere calcolato passando a coordinate polari. Il risultato è $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ - (3) L'integrale diventa $\int_\Omega \frac{1}{u^3}\|\vec{N}(u,v)\|\, dudv$ con $\|\vec{N}(u,v)\| = u$ e può essere calcolato considerando Ω normale rispetto ad u o a v. Il risultato è $1-\log 2$ - (4) La parametrizzazione di Σ è $\varphi(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$ con $(u,v) \in \Omega$ dove Ω è il dominio $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \leq 1\}$. L'integrale diventa $\int_\Omega \frac{1}{1+4u^2+4v^2}\|\vec{N}(u,v)\|\, dudv$ con $\|\vec{N}(u,v)\| = \sqrt{1+4u^2+4v^2}$ e può essere calcolato passando a coordinate polari. Il risultato è $\frac{\pi}{2}(\sqrt{5}-1)$.

6 STOKES E DIVERGENZA

1. Calcolare $\int_\gamma \vec{F} ds$, dove $\vec{F}$ è il campo vettoriale $\vec{F} = (0; x)$ e γ è la parametrizzazione del perimetro del triangolo di vertici $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(1,3)$ percorso in senso antiorario.

2. Calcolare
$$\int_{+\partial S} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2+z^2}$$
dove S è la superficie laterale del cilindro $\{x^2+y^2 \leq 1;\ 0 \leq z \leq 1\}$, con l'orientazione della normale esterna.

3. Calcolare
$$\int_\Gamma xdx + (x+y)dy + (x+y+z)dz$$
dove Γ è la curva parametrizzata da $\Gamma(t) = (\sin t\,; \cos t\,; \sin t + \cos t)$ con $t \in [0, 2\pi]$.

4. Sia ∂T l'ellisse centrata nell'origine passante per $(2,0)$ e $(0,1)$ percorsa in verso antiorario. Calcolare
$$\int_{\partial T} (x^3+y^2)dx + (x^2+y^3)dy.$$

5. Calcolare il flusso del campo $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ uscente dal bordo dell'insieme
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z \leq 1;\ x \geq 0;\ y \geq 0;\ z \geq 0\}$$

6. Calcolare il flusso del campo $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z)$ uscente dal bordo dell'insieme

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \le z \le 1\}$$

7. Sia Ω un aperto connesso in $\mathbb{R}^3$ la cui frontiera $\partial\Omega$ è la superficie regolare chiusa. Sapendo che il volume di Ω è 1, calcolare il flusso del campo $\vec{F}(x,y,z) = (x,0,0)$ uscente da $\partial\Omega$.

Risultati degli esercizi sui teoremi di Stokes e della divergenza:

(1) L'integrale si può calcolare semplicemente con la definizione di integrale di un campo vettoriale su una curva, ma ancor più velocemente col teorema di Stokes in $\mathbb{R}^2$, essendo il campo non conservativo. L'integrale di $\vec{F} = (F_1(x,y); F_2(x,y))$ sul perimetro diventa l'integrale di $F_{2_x} - F_{1_y}$, che in questo caso è 1, sul triangolo, e quindi si riduce all'area del triangolo che è 3 - (2) L'integrale può essere calcolato direttamente, tenendo presente che $+\partial S$ è costituita dalla circonferenza unitaria sul piano xy percorsa in verso antiorario e dalla circonferenza unitaria sul piano $z = 1$ percorsa in verso orario, oppure tramite il teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$. Il campo vettoriale è $\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2+z^2} \,;\, \frac{x}{x^2+y^2+z^2} \,;\, 0 \right)$ e l'integrale di $\vec{F}$ sul bordo è uguale al flusso del rotore di $\vec{F}$ sulla superficie S parametrizzata da $\varphi(t,z) = (\cos t, \sin t, z)$ con $t \in [0, 2\pi]$ e $z \in [0,1]$. Il risultato è π - (3) La curva è chiusa e il campo vettoriale $\vec{F} = (x, x+y, x+y+z)$ non è conservativo. Con il teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$, l'integrale su Γ è uguale al flusso del rotore di $\vec{F}$ sulla superficie racchiusa da Γ, $\Sigma = \{x^2 + y^2 \le 1;\, z = x + y\}$ parametrizzata da $\varphi(u,v) = (u, v, u+v)$ con $(u,v) \in \{u^2 + y^2 \le 1\}$. Il risultato è $-\pi$ - (4) L'integrale si può calcolare semplicemente con la definizione di integrale di un campo vettoriale su una curva, ma ancor più velocemente col teorema di Stokes in $\mathbb{R}^2$, essendo il campo non conservativo. L'integrale di $\vec{F} = (F_1(x,y); F_2(x,y))$ sul bordo diventa l'integrale di $F_{2_x} - F_{1_y}$, che in questo caso è $2x - 2y$, nel dominio racchiuso dall'ellisse. Usando coordinate ellittiche si trova che l'integrale vale 0. Quindi l'integrale di $\vec{F}$ lungo l'ellisse, che è una curva chiusa, è 0 pur essendo il campo non conservativo - (5) Per il teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$ il flusso $\iint_{\partial D} \vec{F} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma$ diventa $\iiint_D \mathrm{div}\vec{F}(x,y,z)\, dxdydz$ con $\mathrm{div}\vec{F} = 3$. L'integrale può essere calcolato considerando D normale rispetto al piano xy e poi rispetto ad x. Il risultato è $\frac{1}{2}$ - (6) Per il teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$ il flusso $\iint_{\partial D} \vec{F} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma$ diventa $\iiint_D \mathrm{div}\vec{F}(x,y,z)\, dxdydz$ con $\mathrm{div}\vec{F} = 2x + 2y + 1$. L'integrale può essere calcolato considerando D normale rispetto al piano xy e poi passando in coordinate polari. Il risultato è $\frac{\pi}{2}$ - (7) Per il teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$ il flusso $\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma$ diventa $\iiint_\Omega \mathrm{div}\vec{F}(x,y,z)\, dxdydz$ con $\mathrm{div}\vec{F} = 3$, ovvero l'integrale è $3 \iiint_\Omega dxdydz$ dove l'integrale non è altro che il volume di Ω. Sapendo che tale volume vale 1, l'integrale risulta quindi $3\mathrm{Vol}(\Omega) = 3$.

7 SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

Successioni di funzioni

Studiare la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

1. $f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ \sin x & x \in \left(\frac{1}{n}, 6\right] \end{cases}$

2. $f_n(x) = \begin{cases} 2(x-n) + \frac{1}{n} & x \in \left[n, n+\frac{1}{2}\right] \\ -2(x-n-1) + \frac{1}{n} & x \in \left(n+\frac{1}{2}, n+1\right] \\ 0 & x \in \mathbb{R} \backslash [n, n+1] \end{cases}$

3. $f_n(x) = \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{n^2} \qquad x \in [-1,1]$

4. $f_n(x) = \begin{cases} -1 & -1 \le x \le -\frac{1}{n} \\ nx & -\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$

5. $f_n(x) = (1-x)x^n \qquad x \in [0,1]$

6. $f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & 0 < x < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$

7. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \qquad x \in [-1,1]$

Risultati degli esercizi sulle successioni di funzioni:
(1) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \sin x$ se $x \in (0,6]$ e $f(x) = 1$ se $x = 0$. La convergenza non è uniforme in $[0,6]$ in quanto $\sup_{x\in[0,6]} |f_n(x) - f(x)| = 1$, ma è uniforme in $[a,6]$ con $0 < a < 6$ essendo $\sup_{x\in[a,6]} |f_n(x) - f(x)| = 0$ non appena $\frac{1}{n} < a$ - (2) Ovviamente $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$. La convergenza non è uniforme in $\mathbb{R}$ in quanto $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 1 + \frac{1}{n} \longrightarrow 1$ per $n \to \infty$, ma è uniforme in ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ in $\mathbb{R}$ dove $\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$ - (3) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \equiv 0$ in $[-1,1]$. Studiando l'andamento delle funzioni tramite lo studio del segno della derivata, si trova che le $f_n(x)$ hanno un massimo in $x = 0$ e dunque $\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| = f_n(0) = \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$. La convergenza è dunque anche uniforme in $[-1,1]$ - (4) $f_n(0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ e quindi $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. Per $x \in (0,1]$, non appena

$\frac{1}{n} < x$, si ha $f_n(x) = 1$ e quindi $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ per $x \in (0,1]$. Per simmetria si ha anche $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = -1$ per $x \in [-1,0)$. Poiché le funzioni $f_n(x)$ sono continue, ma la successione tende puntualmente a una funzione non continua, per il teorema della continuità del limite la successione non può convergere uniformemente in $[-1,1]$. La convergenza è uniforme in ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ in $[-1,0)$ e $(0,1]$ dove $\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$ è definitivamente nullo (cioè nullo da un certo indice in poi) - (5) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \equiv 0$ in $[0,1]$. Studiando l'andamento delle funzioni tramite lo studio del segno della derivata, si trova che le $f_n(x)$ hanno un massimo in $x = \frac{n}{n+1}$ e dunque $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n(\frac{n}{n+1}) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$. La convergenza è dunque anche uniforme in $[0,1]$ - (6) Per $x \in (0,1]$, non appena $\frac{1}{n} < x$, si ha $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ e quindi $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ per $x \in (0,1]$. Poiché f è illimitata, la successione non può convergere uniformemente a f in $(0,1]$. La convergenza è uniforme in ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ in $(0,1]$ dove $\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$ è definitivamente nullo (cioè nullo da un certo indice in poi) - (7) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \equiv 0$ in $[-1,1]$. Studiando l'andamento delle funzioni tramite lo studio del segno della derivata, si trova che le $f_n(x)$ hanno un massimo in $x = \frac{1}{n}$ e dunque $\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| = f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$. Non c'è quindi convergenza uniforme in $[-1,1]$. La convergenza è uniforme in ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ in $(0,1]$, dove l'estremo superiore tende a zero.

Serie di potenze

Studiare la convergenza delle seguenti serie di potenze:

1. $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\log 3)^n}{n + \sqrt[3]{n^2}}\, x^n$$
2. $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^n}{(n+1)\log n}\, x^n$$
3. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1/n^2 + n^2}\, (x-2)^n$$
4. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{1+5^n}\, (x+1)^n$$
5. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n\sqrt{n}} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^n$$
6. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3\log(n+2)}{n(\sqrt{2})^n}\, (x-1)^n$$

Risultati degli esercizi sulle serie di potenze:
Si fa riferimento alla notazione $\sum_n a_n z^n$. Si riportano inoltre solo i risultati relativi alla convergenza assoluta, senza specificare ogni volta che la serie converge totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto nell'insieme di convergenza assoluta e, se la serie converge anche in un estremo, per il teorema di Abel converge anche uniformemente in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto nell'insieme di convergenza assoluta avente tale estremo come uno dei suoi estremi.
(1) La successione a_n è a termini positivi. Con il criterio della radice si vede che $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\log 3}{\sqrt[n]{n+\sqrt[3]{n^2}}} = \frac{\log 3}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{1+n^{-1/3}}} \longrightarrow \log 3$ per $n \to \infty$ e quindi la serie converge assolutamente per $|x| < \frac{1}{\log 3}$ e non converge per $|x| > \frac{1}{\log 3}$. Per $x = \frac{1}{\log 3}$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+\sqrt[3]{n^2}}$ diverge in quanto ha lo stesso carattere della serie armonica, mentre per $x = -\frac{1}{\log 3}$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt[3]{n^2}}$ converge per il criterio di Leibniz - (2) La successione a_n è a termini positivi. Con il criterio del rapporto si vede che $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{e^{n+1}}{(n+2)\log(n+1)} \frac{(n+1)\log n}{e^n} \longrightarrow e$ per $n \to \infty$ e quindi la serie converge assolutamente per $|x| < \frac{1}{e}$ e non converge per $|x| > \frac{1}{e}$. Per $x = \frac{1}{e}$ la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\log n}$ diverge per confronto con la serie armonica, mentre per $x = -\frac{1}{e}$ la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\log n}$ converge per il criterio di Leibniz - (3) La successione a_n è a termini positivi. Con il criterio della radice si vede che $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^2}{1+n^4}} \longrightarrow 1$ per $n \to \infty$ e quindi la serie converge assolutamente per $|x-2| < 1$ ovvero per $x \in (1,3)$ e non converge per $|x-2| > 1$ ovvero per $x \in (-\infty,1) \cup (3,+\infty)$. Per $x = 1$ e $x = 3$ le due serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1/n^2+n^2}(-1)^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1/n^2+n^2}$ convergono assolutamente per confronto con la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ - (4) La successione a_n è a termini positivi. Con il criterio della radice si vede che $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{1+5^n}} \longrightarrow \frac{2}{5}$ per $n \to \infty$ e quindi la serie converge assolutamente per $|x+1| < \frac{5}{2}$ ovvero per $x \in (-\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$ e non converge per $|x+1| > \frac{5}{2}$ ovvero per $x \in (-\infty, -\frac{7}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$. Per $x = -\frac{7}{2}$ e $x = \frac{3}{2}$ le due serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{1+5^n}(\frac{5}{2})^n(-1)^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{1+5^n}(\frac{5}{2})^n$ non convergono in quanto il loro termine generale non è infinitesimo - (5) La serie è definita per $x \neq -3$. La successione a_n è a termini positivi. Con il criterio del rapporto si vede che $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\log(n+1)}{(n+1)\sqrt{(n+1)}} \frac{n\sqrt{n}}{\log n} \longrightarrow 1$ per $n \to \infty$ e quindi la serie converge assolutamente per $\left|\frac{x-1}{x+3}\right| < 1$ ovvero per $x > -1$ e non converge per $\left|\frac{x-1}{x+3}\right| > 1$ ovvero per $x < -1$. Per $x = -1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n\sqrt{n}}(-1)^n$ converge per il criterio di Leibniz (si vede che il termine generale è decrescente per $n \geq 2$) - (6) La successione a_n è a termini positivi. Con il criterio del rapporto (o anche della radice) si vede che $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3\log(n+3)}{(n+1)(\sqrt{2})^{n+1}} \frac{n(\sqrt{2})^n}{3\log(n+2)} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$ per $n \to \infty$ e quindi la serie converge assolutamente per $|x-1| < \sqrt{2}$ ovvero per $x \in (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ e non converge per $|x-1| > \sqrt{2}$ ovvero per $x \in (-\infty, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, +\infty)$. Per $x = 1+\sqrt{2}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3\log(n+2)}{n}$ diverge per confronto con la serie armonica, mentre per $x = 1-\sqrt{2}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3\log(n+2)}{n}(-1)^n$ converge per il criterio di Leibniz.