Approssimazione di Fourier

Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ sull'intervallo $[-\pi, \pi]$. Vogliamo calcolare una approssimazione di Fourier di f.

Calcoliamo la norma delle funzioni dell'insieme

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \dots, \cos(mx), \sin(mx), \dots\}$$

.

Ricordiamo le formule di trigonometria:

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] \tag{1}$$

da cui

$$\int \sin mx \sin nx \, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + c \text{ se } m \neq n \tag{2}$$

mentre invece se $m = n$ dalla formula

$$\sin^2 mx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2mx \tag{3}$$

ricaviamo

$$\int \sin^2 mx \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2mx}{4m} + c = \frac{mx - \sin mx \cos mx}{2m} + c \tag{4}$$

Con lo stesso procedimento si trovano le formule

$$\int \cos mx \cos nx \, dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + c \text{ se } m \neq n \tag{5}$$

$$\int \cos^2 mx \, dx = \frac{mx + \sin mx \cos mx}{2m} + c \tag{6}$$

$$\int \sin mx \cos nx \, dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + c \text{ se } m \neq n \tag{7}$$

$$\int \sin mx \cos mx \, dx = -\frac{\cos 2mx}{4m} + c \tag{8}$$

Calcoliamo le norme delle funzioni:

$$\|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

$$\|\cos mx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = [\frac{mx + \sin mx \cos mx}{2m}]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

(abbiamo applicato la (6)). Analogamente,

$$\|\sin mx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\,dx = [\frac{mx - \sin mx \cos mx}{2m}]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

(abbiamo applicato la (4)).

Verifichiamo ora che l'insieme

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \ldots, \cos(mx), \sin(mx), \ldots\}$$

è ortogonale

$$(\sin mx|\cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx = \left[-\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)}\right]_{-\pi}^{\pi} =$$
$$= -\frac{\cos(m+n)\pi}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)\pi}{2(m-n)} + \frac{\cos(m+n)\pi}{2(m+n)} + \frac{\cos(m-n)\pi}{2(m-n)} = 0$$

(se $n \neq m$, usiamo la (7)).

$$(\sin mx|\cos mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos mx\,dx =$$
$$= \left[-\frac{\cos 2mx}{4m}\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{\cos 2m\pi}{4m} + \frac{\cos 2m\pi}{4m} = 0$$

(usando la (8)). In maniera analoga si verifica che
$(\sin mx|\sin nx) = 0$ e $(\cos mx|\cos nx) = 0$.

Vogliamo ora ottenere lo sviluppo di Fourier della funzione

$$f(x) = x^2$$

nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. A questo scopo calcoliamo i coefficienti

$$a_0 = \frac{(f|1)}{\|1\|^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{(f|\cos kx)}{\|\cos kx\|^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$$

per $k = 1, 2, 3, \ldots$ e

$$b_k = \frac{(f|\sin kx)}{\|\sin kx\|^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

per $k = 1, 2, 3, \ldots$

Poiché la funzione x^2 è pari mentre la funzione $\sin kx$ è dispari tutti i coefficienti b_k sono nulli.

Per quanto riguarda i coefficienti a_k:

$$\int x^2 \cos kx\, dx = \frac{x^2 \sin kx}{k} + \frac{2x \cos kx}{k^2} - \frac{2 \sin kx}{k^3} + c$$

(integrando per parti due volte). L'integrale definito allora è

$$\begin{aligned} &(\frac{\pi^2 \sin k\pi}{k} + \frac{2\pi \cos k\pi}{k^2} - \frac{2 \sin k\pi}{k^3}) \\ &-(-\frac{\pi^2 \sin k\pi}{k} - \frac{2\pi \cos k\pi}{k^2} + \frac{2 \sin k\pi}{k^3}) = \\ &= \frac{4\pi \cos k\pi}{k^2} = \frac{4\pi(-1)^k}{k^2} \end{aligned}$$

(giacché $\sin k\pi = 0$ e $\cos k\pi = (-1)^k$ e pertanto $a_k = \frac{4(-1)^k}{k^2}$, per $k \geq 1$.

Otteniamo in definitiva le seguenti approssimazioni di x^2:

$$\frac{\pi^2}{3}$$

$$\frac{\pi^2}{3} - 4\cos x$$

$$\frac{\pi^2}{3} - 4[\cos x - \frac{1}{2^2} \cos 2x]$$

$$\frac{\pi^2}{3} - 4[\cos x - \frac{1}{2^2} \cos 2x + \frac{1}{3^2} \cos 3x]$$

$$\frac{\pi^2}{3} - 4[\cos x - \frac{1}{2^2} \cos 2x + \frac{1}{3^2} \cos 3x - \frac{1}{4^2} \cos 4x]$$

Si dimostra che

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4[\cos x - \frac{1}{2^2} \cos 2x + \frac{1}{3^2} \cos 3x - \frac{1}{4^2} \cos 4x + \cdots]$$

per $x \in [-\pi, \pi]$.

Per esempio prendendo $x = \pi$ si trova

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4[\cos \pi - \frac{1}{2^2} \cos 2\pi + \frac{1}{3^2} \cos 3\pi - \frac{1}{4^2} \cos 4\pi + \cdots]$$

da cui

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4[-1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}(-1) - \frac{1}{4^2} + \cdots]$$

e quindi

$$4[-1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}(-1) - \frac{1}{4^2} + \cdots] = \frac{\pi^2}{3} - \pi^2$$

$$4[-1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}(-1) - \frac{1}{4^2} + \cdots] = -\frac{2\pi^2}{3}$$

ovvero

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(Problema di Basilea, risolto per la prima volta da Eulero, con altri metodi, nel 1735 circa).