Esercizi Lezione 15

1. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 14 & 18 & 22 & 26 & 30 \end{pmatrix}$$

(1) Calcolare il rango (numero dei pivot della forma ridotta)
(2) Applicare il teorema degli orlati per calcolare il rango per minori di A.
(3) Determinare una base per $Row(A)$ ed una base per $Col(A)$. Verificare che entrambi gli spazi hanno dimensione 2.
(4) Applicare il teorema degli orlati per calcolare il rango per minori della matrice A^T.

2. Data la matrice A dell'esercizio precedente, verificare che essendo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$, le prime due righe di A sono linearmente indipendenti.

3. Verificare che se un minore di ordine d di una matrice $m \times n$ ha determinante diverso da zero allora le corrispondenti righe sono linearmente indipendenti. In particolare, verificare questa proprietà nel caso della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 7 & 3 & 3 \\ 7 & -2 & 8 & 5 & 4 \\ 8 & 9 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

dopo aver osservato che per il minore ottenuto scegliendo le righe 2,3,4 e le colonne 2,3,4

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & 3 \\ -2 & 8 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$

Verificare che le righe $(2, 3, 0, -1, 2)$,$(6, 4, 7, 3, 3)$, $(7, -2, 8, 5, 4)$ sono indipendenti. (Suggerimento: applicando la definizione di indipendenza lineare si ottiene un sistema lineare omogeneo in cui tre equazioni hanno per matrice dei coefficienti proprio il minore preso in considerazione e quindi, essendo il determinante diverso da zero, il sistema ha solo la soluzione nulla).

4. Dimostrare che il rango per minori di una matrice A è uguale al rango per righe di A. (Suggerimento: Sia d il rango per minori di A e sia r la dimensione di $Row(A)$. Dimostrare che $d = r$ dimostrando prima che $d \leq r$ sfruttando l'esercizio precedente. Per conludere verificare che $r \leq d$ (e quindi $r = d$), considerando la forma R ridotta a scala di A e prendere il minore di R ottenuto scegliendo le righe non nulle e le colonne dove si trovano i pivot. Verificare che questo minore ha determinante non nullo e che quindi $r \leq d$.)

5. Se $X = \{1, 2, \dots, n\}$ è un insieme di n oggetti, sappiamo che esistono $n!$ permutazioni di X. Verificare che se $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ le permutazioni degli elementi di X presi due per volta sono:

$$12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54$$

Ce ne sono 20. Infatti il primo elemento dei due si può scegliere in 5 modi. Una volta scelto il primo elemento, il secondo si può scegliere in 4 modi. In generale verificare che il numero delle permutazioni di k oggetti su n $(k \leq n)$ è $\frac{n!}{(n-k)!}$. Se, infine, ci interessano le combinazioni di due oggetti su 5, ossia ci interessa la scelta di due oggetti senza distiguere l'ordine in cui gli oggetti vengono scelti, allora delle 20 permutazioni viste sopra molte corrispondono alla stessa combinazione:$12 = 21, 13 = 31, \ldots$. In tal modo si può verificare che il numero delle combinazioni si due oggetti su 5 è 10. Verificare che in generale si ha che il numero di combinazioni di k oggetti su n è dato da $\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$. Osserviamo infine che quanto appena detto equivale ad affermare che il numero di sottoinsiemi costituiti da k oggetti di un insieme di n oggetti è $\binom{n}{k}$

6. Se $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ elencare tutti i possibili sottoinsiemi di X (ce ne sono 32). In generale, se X è un insieme di n oggetti sfruttare l'esercizio precedente per dimostrare che X possiede 2^n sottoinsiemi. (Suggerimento: Scrivere $2 = 1 + 1$ e sfruttare la formula per lo sviluppo di un binomio).