Esercizi Lezione 2

1. Si definiscano sull'insieme $\mathbb{R}^2$ le operazioni seguenti:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$k(a,b)=(ka,kb)$$

dove $a,b,c\in\mathbb{R}$. Verificare che sono definite le seguenti proprietà:

(a) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
(b) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$
(c) $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$
(d) $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$
(e) $c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}, c\in\mathbb{R}$
(f) $(c+d)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+d\mathbf{u}, c,d\in\mathbb{R}$
(g) $c(d\mathbf{u})=(cd)\mathbf{u}$
(h) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

2. Dati $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$, semplificare l'espressione $3\mathbf{u}+(5\mathbf{v}-2\mathbf{u})+2(\mathbf{v}-\mathbf{u})$ giustificando ciascun passaggio con l'uso di una delle proprietà dell'esercizio precedente. (Iniziare, ad esempio, scrivendo

$$\begin{aligned}&3\mathbf{u}+(5\mathbf{v}-2\mathbf{u})+2(\mathbf{v}-\mathbf{u})\\&=3\mathbf{u}+(-2\mathbf{u}+5\mathbf{v})+(2\mathbf{v}-2\mathbf{u})\qquad \text{(a), (e)}\end{aligned}$$

Continuare la catena di uguaglianze fino ad arrivare a $7\mathbf{v}-\mathbf{u}$).

3. Verificare se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono sottospazi di $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(0,y)|y\in\mathbb{R}\}$
(2) $\{(x,y)|x\geq 0, y\geq 0\}$
(3) $\{(x,2x)|x\in\mathbb{R}\}$
(4) $\{(x,y)|xy\geq 0\}$

4. Verificare se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$.

(1) $\{(x,x,x)|x\in\mathbb{R}\}$
(2) $\{(x,0,2x)|x\in\mathbb{R}\}$

5. Verificare che i vettori $\mathbf{u}=(3,2),\mathbf{v}=(1,4),\mathbf{w}=(4,-4)$ sono linearmente dipendenti, cioè determinare tre coefficienti non tutti nulli $a,b,c\in\mathbb{R}$ tali che $a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+c\mathbf{w}=0$.

6. Determinare se $\mathbf{u}=(3,-1,2)$, $\mathbf{v}=(-1,13,-3)$ appartengono o meno al sottospazio $\langle\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\rangle$, dove $\mathbf{w}_1=(1,5,0)$, $\mathbf{w}_2=(1,-1,1)$.

7. Determinare la dimensione dei seguenti sottospazi

(1) $\langle\mathbf{0}\rangle$
(2) $\langle(1,1,1)\rangle$
(3) $\langle(1,1,1),(2,2,2)\rangle$
(4) $\langle(1,1),(1,-1)\rangle$
(5) $\langle(1,1),(1,-1),(3,1)\rangle$

8. Verificare che il sottoinsieme $\{\mathbf{0},\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ di $\mathbb{R}^n$ è linearmente dipendente per qualunque scelta dei vettori $\mathbf{u},\mathbf{v}$.