Esercizi Lezione 24

Riassumiamo, per comodità di studio, le proprietà principali delle coniche in forma canonica. Per le coniche non in forma canonica occorrerà eseguire gli opportuni cambiamenti di riferimento.

Parabola in forma canonica

EQUAZIONE: $y = ax$ ($a > 0$)

FUOCO: $F(0, \frac{1}{4a})$

DIRETTRICE $y = -\frac{1}{4a}$

VERTICE: $(0, 0)$.

ASSE DI SIMMETRIA: $x = 0$

DIAMETRO FOCALE: $\frac{1}{a}$

ECCENTRICITÀ: $e = 1$

Ellisse in forma canonica

EQUAZIONE: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)

FUOCHI: $F(\pm c, 0)$, $c^2 = a^2 - b^2$

ECCENTRICITÀ: $e = \frac{c}{a} < 1$ (rapporto tra DISTANZA TRA I FUOCHI E ASSE MAGGIORE)

DIRETTRICI $x = \pm a/e$

VERTICI: $(\pm a, 0)$, (e co-vertici) $(0, \pm b)$.

ASSI DI SIMMETRIA: $x = 0$, $y = 0$.

(ATTENZIONE: nello schema qui riportato si sta supponendo che l'asse maggiore dell'ellisse sia situato sull'asse delle x . Se invece l'asse maggiore è sull'asse delle y e se indichiamo sempre con a la lunghezza dell'asse maggiore allora l'equazione dell'ellisse è $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ($a > b > 0$))

Iperbole in forma canonica

EQUAZIONE: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)

FUOCHI: $F(\pm c, 0)$, $c^2 = a^2 + b^2$

ECCENTRICITÀ: $e = \frac{c}{a} > 1$ (rapporto tra DISTANZA TRA I FUOCHI E distanza tra i vertici)

DIRETTRICI $x = \pm a/e$

VERTICI: $(\pm a, 0)$.

ASSI DI SIMMETRIA: $x = 0$, $y = 0$.

ASSE TRAVERSO: sull'asse delle x di lunghezza $2a$.

ASINTOTI: $y = \pm \frac{b}{a}$.

(ATTENZIONE: nello schema qui riportato si sta supponendo che l'asse trasverso dell'ellisse sia situato sull'asse delle x . Se invece l'asse trasverso è sull'asse delle y e se indichiamo sempre con a la lunghezza dell'asse trasverso allora l'equazione dell'ellisse è $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)) I vertici sono $(0, \pm a)$, gli asintoti sono $y = \pm \frac{a}{b}$, i fuochi $(0, \pm c)$ e $c^2 = a^2 + b^2$.)

1. Calcolare vertice, asse di simmetria, fuoco e direttrice della parabola di equazione $y = 5x^2 - 30x + 49$. Disegnarla.

2. Calcolare vertice, asse di simmetria, fuoco e direttrice della parabola di equazione $x^2 - 4x = 8y - 28$. Disegnarla.

3. Disegnare, illustrando tutti gli aspetti fondamentali (vertici, fuochi, direttrici, etc.) dell'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

4. Disegnare, illustrando tutti gli aspetti fondamentali (vertici, fuochi, direttrici, etc.) dell'iperbole di equazione

$$9x^2 - 72x - 16y^2 - 32y = 16$$

5. Effettuare un cambiamento di coordinate ruotando di $\frac{\pi}{4}$ per mostrare che $xy = 2$ è un'iperbole (equilatera).

6. Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ax + by = 0$, con a, b non entrambi nulli, dimostrare che la retta di equazione $ax + by = 0$ è tangente alla circonferenza nell'origine.

7. Determinare le equazioni cartesiane per le rette tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 12$ parallele alla retta di equazione $x + y = 1$. (Suggerimento: l'intersezione tra la tangente e la circonferenza deve essere un punto "doppio").

8. Sapendo che i fuochi sono $(\pm 2, 0)$ e i vertici $(\pm 4, 0)$ scrivere l'equazione dell'ellisse. Disegnarla.

9. Scrivere l'equazione di una parabola che ha vertice $(0, 0)$ e direttrice $y = 6$. Disegnarla.

10. Scrivere l'equazione di una ellisse che ha fuochi $(0, \pm 2)$ ed eccentricità $e = \frac{1}{9}$

11. Scrivere l'equazione di una iperbole che ha vertici $(\pm 3, 0)$ e fuochi $(\pm 4, 0)$.

12. Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C(1, -2)$ tangente alla retta $s : x - y + 1 = 0$.

13. Scrivere l'equazione della circonferenza tangente alla retta $s : 2x + y - 1 = 0$ nel punto $A(-1, 3)$ e che abbia centro sulla retta $r : x + y + 1 = 0$.

14. Scrivere l'equazione dell'ellisse avente fuochi $F(1, 1)$, $F'(1, 3)$ e passante per il punto $A(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$.