Esercizi Lezione 32

1. Dimostrare che l'insieme P_3 dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x di grado minore o uguale a 3 è uno spazio vettoriale reale (cioè sul campo $\mathbb{R}$). Determinarne due basi distinte.

2. Sia $\mathbb{R}^2$ l'insieme delle coppie di numeri reali. Definiamo su $\mathbb{R}^2$ l'operazione "somma" come segue:

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

con $(x, y) + (x', y') = (x + x' + 1, y + y' + 1)$. Verificare che $\mathbb{R}^2$ è un gruppo abeliano.

3. Sia $\mathbb{R}^2$ l'insieme delle coppie di numeri reali. Definiamo su $\mathbb{R}^2$ l'operazione esterna come segue:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

con $\alpha(x, y) = (\alpha x + \alpha - 1, \alpha y + \alpha - 1)$. Verificare che

- (1) $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, ed ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$;
- (2) $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ed ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$;
- (3) $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ed ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$;
- (4) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$.

Concludere da questo esercizio e dal precedente che con queste operazioni $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale.

4. Indichiamo con S lo spazio vettoriale definito nell'esercizio precedente. Verificare se i vettori $(1, 0)$ e $(0, 1)$ sono linearmente dipendenti o indipendenti.

5. Sia P_4 lo spazio vettoriale dei polinomi reali in una indeterminata di grado minore o uguale a 4. Verificare che i polinomi $x^2 - x, x^3 + x^2, x^4 + x^3$ sono linearmente indipendenti. Calcolare lo spazio da essi generato.

6. Nello spazio vettoriale $M(2 \times 2, \mathbb{R})$, determinare se i vettori

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti.