Esercizi 34

1. Determinare una base del sottospazio di $M(3 \times 3, \mathbb{R})$ composto dalle matrici simmetriche e verificare esplicitamente che la base cosí determinata è un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti e minimale di generatori.

2. Verificare che se U e W sono due sottospazi di uno spazio vettoriale V allora l'insieme $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale. Dare invece un esempio di due sottospazi di un opportuno spazio vettoriale per cui $U \cup W$ non è un sottospazio vettoriale.

3. Se U e W sono due sottospazi di uno spazio vettoriale V si definisce somma $U + W$ dei due sottospazi l'insieme dei vettori ottenuti sommando i vettori di U con quelli di W, cioè : $U + W = \{x \in V | x = u + w, u \in U, w \in W\}$. Verificare che $U + W$ è un sottospazio di V.

4. Siano

$$U = \langle (1, 1, 2, 1), (0, 1, -1, 0) \rangle$$

e

$$W = \langle (-1, 0, 2, 3), (0, 1, -1, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle$$

due sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Verificare che

$$U + V = \langle (1, 1, 2, 1), (0, 1, -1, 0), (-1, 0, 2, 3), (0, 1, -1, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle.$$

Calcolare la dimensione di U,W, $U + W$. Determinare anche $U \cap W$ e la sua dimensione.

5. Ripetere l'esercizio precedente con i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ U, di equazioni cartesiane $x - y = 0, z - w = 0$, e W, di equazioni cartesiane $x = 0, y + z + w = 0$.