Esercizi Lezione 36

1. Per le seguenti matrici, determinare il polinomio caratteristico, gli autovalori e autovettori, e, se possibile, una matrice P tale che $P^{-1}AP = D$ dove D è diagonale.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2. Se $P^{-1}AP = D$ dove D è diagonale, che cosa rappresentano le componenti sulla diagonale di D e le colonne di P?

3. Mostrare che $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile.

4. Mostrare che $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile se e solo se $c = 0$.

5.Calcolare gli autovalori di

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

6. Dimostrare che se λ è un autovalore di A allora $k\lambda$ è un autovalore di kA qualunque sia $k \in \mathbb{R}$. Dimostrare che λ^2 è un autovalore di A^2. Dimostrare infine che $3 - 2\lambda + 5\lambda^3$ è un autovalore di $3I - 2A + 5A^3$.

7. Se due matrici sono legate dalla relazione $B = P^{-1}AP$ si dice allora che A e B sono simili. Verificare che questa è una relazione d'equivalenza nell'insieme di tutte le matrici quadrate di ordine n.

8. Dimostrare che due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. (Suggerimento: Sfruttare il Teorema del Prodotto o di Binet).