Esercizi Lezione 39

1. In ciascuno dei casi seguenti dire se l'affermazione è vera o falsa giustificando in ogni caso la propria risposta.

(a) Ogni autovalore di una matrice ha un autovettore di lunghezza 1.
(b) Se P ha colonne a due a due ortogonali allora P è una matrice ortogonale.
(c) Se P ha colonne a due a due ortogonali e se $|detP| = 1$ allora P è una matrice ortogonale.
(d) Ogni matrice ortogonale è invertibile.
(e) Ogni matrice ortogonale è simmetrica.
(f) Ogni matrice diagonale è ortogonale.
(g) Se A è $n \times n$ simmetrica allora, qualunque sia la matrice P, $n \times n$, anche $P^T AP$ è simmetrica.

2. Verificare se le seguenti matrici sono ortogonali, se non lo sono si normalizzino le colonne per renderle ortogonali.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Determinare una matrice ortogonale P tale che $P^T AP$ sia diagonale, dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Determinare una matrice ortogonale P tale che $P^T AP$ sia diagonale, dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Una matrice quadrata E è detta matrice di proiezione se $E^2 = E = E^T$. Mostrare che se E è una matrice di proiezione, allora $P = I - 2E$ è una matrice ortogonale e simmetrica. Mostrare che se P è una matrice ortogonale e simmetrica, allora $E = \frac{1}{2}(I - P)$ è una matrice di proiezione.

6. Sia $F_1, F_2, \dots, F_k$ una base ortonormale di un sottospazio U di $\mathbb{R}^n$. Consideriamo la matrice $n \times k$ Q ottenuta prendendo $F_1, F_2, \dots, F_k$ come colonne, cioè $Q = [F_1, F_2, \dots, F_k]$. Si verifichi allora che la matrice $E = QQ^T$ è una matrice di proiezione.

7. Verificare che posto $F_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T$ e $F_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})^T$ allora la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

è una matrice di proiezione.