Esercizi Lezione 40

1. Se A è una matrice quadrata simmetrica e P una qualunque matrice quadrata dello stesso ordine di A, verificare che $P^T AP$ è ancora simmetrica.

2. Presa la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Si osservi che $(-2, 1, 3)^T$ è un autovettore per A. Normalizzando abbiamo che

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}(-2, 1, 3)^T$$

è un autovettore di lunghezza 1. Si verifichi che

$$\{(-2, 1, 3)^T, (5, 1, 3)^T, (0, 3, -1)^T\}$$

è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$. Si verifichi che la matrice

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{5}{\sqrt{35}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{35}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{35}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

è ortogonale.

Si verifichi infine che $P^T AP$ è una matrice che, a blocchi, è del tipo

$$\begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

Dove A_1 è una matrice 2×2. (Si trova che

$$P^T AP = \begin{pmatrix} -1 & -2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{35}} & -\frac{12}{\sqrt{35}} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

)

3. Dimostrare che il prodotto di due matrici ortogonali è ancora una matrice ortogonale.

4. Dimostrare che se P è una matrice ortogonale di ordine n (cioè $n \times n$) allora la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$$

è una matrice ortogonale di ordine $n + 1$.

5. Data la forma quadratica in due variabili $2x^2 + 4xy + 3y^2$ trovare la corrispondente matrice simmetrica.

6. Data la forma quadratica in tre variabili $2x^2 + 4xy + 3y^2 + xz$ trovare la corrispondente matrice simmetrica.

7. Data la matrice simmetrica

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

scrivere la corrispondente forma quadratica.