Esercizi Lezione 42

1. Verificare che l'applicazione identica:

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

definita da $T(X) = X$ per ogni $X \in \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

2.Verificare che l'applicazione nulla:

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

definita da $T(X) = 0$ per ogni $X \in \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

3. Fissato un sottospazio U di $\mathbb{R}^n$, verificare che l'applicazione

$$P_U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

definita da $P_U(X) =$ proiezione ortogonale di X sul sottospazio U, per ogni $X \in \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare. (Suggerimento: scrivere una formula per la proiezione ortogonale usando lo sviluppo di Fourier)

4. Sia dato il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ di equazione cartesiana $x + y + z + w = 0$. Determinare una base di U. Applicare il procedimento di Gram-Schmidt alla base così trovata. Scrivere lo sviluppo di Fourier rispetto alla base ortogonale trovata. Determinare infine le equazioni della proiezione ortogonale sul sottospazio U.

5. Fissato il vettore $\vec{v} = (1, -1, 2)^T$, sia data la trasformazione $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(\vec{u}) = \vec{v} \wedge \vec{u}$. Verificare che T è lineare. Calcolarne la matrice standard.

6. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

sia T_A la trasformazione lineare indotta da A. Verificare che la matrice standard di T_A è proprio A.

7. Dare un esempio di trasformazione $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che non sia lineare.

8.Se $n > m$, sia

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

definita da $T(x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$ per ogni $X \in \mathbb{R}^n$. Verificare che T è una trasformazione lineare e determinarne la matrice standard.

9. Diremo che una trasformazione lineare T è una **isometria** se

$$\|T(X) - T(Y)\| = \|X - Y\|$$

per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Definiamo l'endomorfismo T di $\mathbb{R}^n$ come segue: dato un sottospazio U di $\mathbb{R}^n$, $T(X) = 2P_U(X) - X$, per ogni $X \in \mathbb{R}^n$, dove P_U è la proiezione ortogonale definita nell'esercizio **3.**

(a) Verificare che T è lineare.

(b) Osservare che, per ogni $X \in \mathbb{R}^n$, $X = P_U(X) + (X - P_U(X))$ e che $P_U(X)$ è perpendicolare a $X - P_U(X)$. Osservare inoltre che $T(X) = P_U(X) + (P_U(X) - X)$.

(c) Sfruttare le osservazioni precedenti per calcolare $\|T(X)\|^2$ e $\|X\|^2$ e verificare che coincidono. Dedurne che T è una isometria.

10. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato da $\langle (2, 1, 2)^T, (1, 2, -2)^T \rangle$. Scrivere la matrice standard dell'applicazione $T(X) = 2P_U(X) - X$, per ogni $X \in \mathbb{R}^3$, dove P_U è la proiezione ortogonale definita nell'esercizio **3.** Verificare che la matrice standard di T è una matrice ortogonale.