Esercizi Lezione 43

1. Verificare che le seguenti applicazioni sono lineari:

(1) $T : M(m \times n) \to M(k \times l)$ definita da $T(A) = PAQ$ dove P e Q sono due fissate matrici di ordine $k \times m$ e $n \times l$.
(2) $T : P_n \to P_n$ dove $T(p(x)) = p(x+1)$ per ogni polinomio $p(x) \in P_n$.
(3) $T : M(n \times n) \to \mathbb{R}$ dove $T(A) = trA$, dove $tr(A)$ è la traccia di A.

2.In ciascuno dei seguenti casi, determinare una trsformazione lineare T con le proprietà richieste e calcolare $T(\mathbf{v})$

(a) $T : P_2 \to P_4$, $T(1) = x^4$, $T(x + x^2) = 1$, $T(x - x^2) = x + x^3$ e sia $\mathbf{v} = a + bx + cx^2$.
(b) $T : M(2 \times 2) \to \mathbb{R}^2$,

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

3. Dati i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ in uno spazio vettoriale V, definiamo $T : \mathbb{R}^n \to V$ come

$$T\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n.$$

(a) Dimostrare che T è iniettiva se e solo se l'insieme $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è linearmente indipendente.
(b) Dimostrare che T è suriettiva se e solo se l'insieme $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera V.

4. Sfruttare l'esercizio precedente per costruire tre applicazioni da $\mathbb{R}^4$ a $M(2 \times 2)$

(a) Un'applicazione iniettiva ma non suriettiva;
(b) Un'applicazione suriettiva ma non iniettiva;
(c) Un isomorfismo.

5. Determinare se è possibile o impossibile costruire un isomorfismo tra $\mathbb{R}^4$ e $M(2 \times 3)$ spiegando precisamente la costruzione dell'isomorfismo o la impossibilità della costruzione.