Esercizi Lezione 44

1. Usando il Teorema delle Dimensioni, dimostrare che ogni matrice quadrata A $n \times n$ è del tipo $A = B^T - 3B$ per una opportuna matrice $B \in M(n \times n)$.

2. Sia $\mathfrak{sl}(n)$ l'insieme delle matrici $n \times n$ a traccia nulla verificare che esso è un sottospazio vettoriale di $M(n \times n)$ e che ha dimensione $n^2 - 1$. Determinare una base per $\mathfrak{sl}(2)$.

3. Se A è una matrice $n \times n$ fissata, sia $U = \{B \in M(m \times n) | BA = 0\}$ e $W = \{BA | B \in M(m \times n)\}$. Usando il Teorema delle Dimensioni, dimostrare che U e W sono entrambi sottospazi di $M(m \times n)$ e che sia ha $dimU + dimW = mn$.

4. Siano U e W i sottospazi delle matrici $n \times n$ simmetriche e antisimmetriche rispettivamente. Dimostrare che $dimU + dimW = n^2$.

5. Determinare se le seguenti trasformazioni lineari sono iniettive, suriettive, biiettive.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 3x + y \\ x + y \end{pmatrix}$$

(c) $T : P_2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to M(2 \times 2)$ definita da

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b & b - c \\ a + b & b + c \end{pmatrix}$$