Esercizi Lezione 45

1. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, e siano $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ e $\mathcal{D} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ due basi di $\mathbb{R}^2$. Calcolare $C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v})$ e $C_{\mathcal{D}}(\mathbf{v})$. Calcolare la matrice del cambiamento di coordinate $P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}$. Usare la matrice appena trovata per calcolare di nuovo $C_{\mathcal{D}}(v)$ e confrontare il risultato con quello ottenuto prima.

2. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, e siano

$$\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

e

$$\mathcal{D} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

due basi di $\mathbb{R}^3$. Calcolare $C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v})$ e $C_{\mathcal{D}}(\mathbf{v})$. Calcolare la matrice del cambiamento di coordinate $P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}$. Usare la matrice appena trovata per calcolare di nuovo $C_{\mathcal{D}}(v)$ e confrontare il risultato con quello ottenuto prima.

3. Esercizio come i due precedenti, con P_1, $\mathbf{v} = p(x) = 2 - x$, e basi $\mathcal{B} = \{1, x\}$, $\mathcal{D} = \{x, 1 + x\}$

4. Verificare che $\mathcal{B} = \{1, x - 2, (x - 2)^2\}$ è una base per P_2. Esprimere $p(x) = 1 + 2x - 5x^2$ nella base $\mathcal{B}$. Scrivere $C_{\mathcal{B}}(p(x))$ (Polinomio di Taylor centrato in $x = 2$.)

5. Se $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ è una base di uno spazio vettoriale V, verificare che $C_{\mathcal{B}}(b_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $C_{\mathcal{B}}(b_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, C_{\mathcal{B}}(b_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.