

Esercizi Lezione 46

1. Sia $T : M(2 \times 2) \rightarrow \mathbb{R}$, l'applicazione lineare definita da $T(A) = \text{tr}(A)$. Calcolare la matrice rispetto alle basi $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{D} = \{1\}$.

2. Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, l'applicazione lineare definita da

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ x + y - 3z \end{pmatrix}$$

Siano $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ e $\mathcal{D} = \{\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, basi di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ rispettivamente. Determinare la matrice $M_{\mathcal{D}\mathcal{B}}(T)$.

3. Sia $D : P_3 \rightarrow P_2$ l'operatore differenziale $D(p(x)) = p'(x)$ e siano $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$, $\mathcal{D} = \{1, x, x^2\}$ le rispettive basi.

- (a) Calcolare la matrice $M_{\mathcal{D}\mathcal{B}}(D)$;
- (b) Calcolare la matrice $M_{\mathcal{D}\mathcal{B}'}(D)$, dove $\mathcal{B}' = \{x^3, x^2, x, 1\}$;
- (c) Usando la parte (a), calcolare $D(5 - x + 2x^3)$ e $D(a + bx + cx^2 + dx^3)$ verificando il teorema:

$$C_{\mathcal{D}}(D(p(x))) = MC_{\mathcal{B}}(p(x))$$

4. Siano $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow P_1$ e $S : P_1 \rightarrow P_2$ due trasformazioni lineari definite da, rispettivamente,

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + (a + b)x$$

e $S(p(x)) = x(p(x))$.

- (a) Calcolare $(S \circ T) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
- (b) Calcolare $(S \circ T) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
- (c) Fissate le basi $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{1, x\}$ in P_1 , $\mathcal{D} = \{1, x, x^2\}$ in P_2 , calcolare le matrici $M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(T)$, $M_{\mathcal{D}\mathcal{B}}(S)$.
- (d) Calcolare il prodotto delle matrici

$$M_{\mathcal{D}\mathcal{B}}(S)M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(T)$$

e verificare che essa coincide con la matrice $M_{\mathcal{D}\mathcal{E}}(S \circ T)$.

5. Verificare che la trasformazione T dell'esercizio precedente è invertibile. Calcolare T^{-1} . Verificare che

$$(M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(T))^{-1} = M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(T^{-1})$$

("La matrice della trasformazione inversa è l'inversa della matrice della trasformazione").