

Esercizi Lezione 47

1. Sia data una retta ℓ per l'origine con versore direttore $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$. Calcolare la matrice standard della proiezione ortogonale $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ di un vettore sulla retta ℓ , calcolando prima la matrice che rappresenta T nella base adattata al problema: $\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -d_2 \\ d_1 \end{pmatrix} \right\}$; (osservare che $\mathcal{D}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$); calcolando poi $P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{D}}$ e $P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{E}}$ e sfruttando infine la relazione di similitudine.

2. Sia $T : P_2 \rightarrow P_2$, l'applicazione lineare definita da $T(p(x)) = p(2x - 1)$. Trovare $M_{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 - x, x^2\}$.

Mostrare che T è diagonalizzabile e determinare una base $\mathcal{D}$ di P_2 rispetto alla quale $M_{\mathcal{D}}$ è diagonale.

3. Se B è una matrice 2×2 fissata, definiamo $T : M(2 \times 2) \rightarrow M(2 \times 2)$ ponendo $T(A) = BA$ per ogni $A \in M(2 \times 2)$. Se $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, determinare una base $\mathcal{B}$ di $M(2 \times 2)$ tale che $M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} aI_2 & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 \end{pmatrix}$.

4. Sapendo che la matrice di $T : P_1 \rightarrow P_1$ è $M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ con $\mathcal{B} = \{1, x\}$, calcolare $T^{-1}(2x - 3)$.