Esercizi Lezione 49

1. Sia $M(n \times n) \times M(n \times n) \rightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione definita da $(A|B) = \text{tr}(AB^T)$. Verificare che essa soddisfa i quattro assiomi che definiscono un prodotto scalare e che pertanto $M(n \times n)$ è uno spazio euclideo.

2. In P_3 fissiamo arbitrariamente 4 valori a_0, a_1, a_2, a_3 e poniamo $(p(x)|q(x)) = \sum_{i=0}^3 p(a_i)q(a_i)$. Verificare che questo è un prodotto scalare.

3. Data la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, si ponga $(X|Y) = X^T P Y$ per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^2$. Verificare che questo è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ con il quale $\mathbb{R}^2$ diventa uno spazio euclideo (non standard). Disegnare il luogo dei punti di $\mathbb{R}^2$ che soddisfano $\|X\| = 1$ ("circonferenza").

4. Su $C([a, b])$ (spazio delle funzioni continue sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$) definiamo

$$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Verificare che questo è un prodotto scalare.

5. In P_3 fissiamo $\{0, 1, 2, 3\}$, calcolare $\|x^2 + x\|$ (v. esercizio **2.**)

6. Calcolare $\|x^2 + x\|$ nello spazio $C([0, 1])$ (v. esercizio **4.**)