Esercizi Lezione 50

1. Verificare che $\{\sin x, \cos x\}$ è un insieme ortogonale di $C([-\pi, \pi])$.

2. In P_3 con $(p(x)|q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$ applicare il procedimento di Gram-Schmidt alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$. Ricavare la base ortogonale $\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5}x\}$. Normalizzare i polinomi così ottenuti in modo che assumano valore 1 su 1, cioè in modo che $p(1) = 1$, si ottengono in tal modo i polinomi $\{1, x, \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\}$. (Polinomi di Legendre)

3. Su $C([0, 1])$ (spazio delle funzioni continue sull'intervallo chiuso e limitato $[0, 1]$) definiamo

$$(f|g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Siano assegnate $f(x) = x$ e $g(x) = 3x - 2$. Calcolare

(a) $\|f\|$;
(1) la distanza tra f e g;
(2) verifcare che le due funzioni sono ortogonali.

4. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ con prodotto scalare definito da $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = 2u_1v_1 + 3u_2v_2$, dove $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, e $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, applicare il procedimento di Gram-Schmidt alla base $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ per ottenere una base ortogonale.