

Esercizi Lezione 51

1. Sia V lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare canonico. Sia U il sottospazio di equazione cartesiana $x+y+z=0$. Calcolare la migliore approssimazione

del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ in U .

2. Nello spazio euclideo $V = M(2 \times 2)$ con prodotto scalare definito da $(A|B) = \text{tr}(AB^T)$, determinare la matrice appartenente al sottospazio U generato da dalle matrici

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che meglio approssima la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(Risultato: la matrice cercata è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix})$$

3. Calcolare la funzione della forma $f(t) = kt$, $k \in \mathbb{R}$, più vicina alla funzione $\sin t$ nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. (Suggerimento: Usare lo spazio euclideo $V = C([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ con prodotto scalare $(f|g) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x) dx$) (Soluzione: $\frac{24}{\pi^3}t$).

4. Ripetere l'esercizio **3.** per l'intervallo $[-\pi, \pi]$. (Soluzione: 0).

5. Dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

(Suggerimento: sfruttare lo sviluppo della funzione x^2)

6. Dato lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare canonico, sia U il sottospazio generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Si determini il vettore di U che ha minima distanza da $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.