Esercizi Lezione 53

1. Siano A e B due matrici quadrate $n \times n$ tali che $A + B = I_n$ (la matrice identità), e $AB = 0_n$ (la matrice nulla). Dimostrare che $A^2 = A$ e $B^2 = B$.

Soluzione

$$\begin{aligned}A(A + B) &= AI_n = A \\A^2 + AB &= A \\A^2 + 0_n &= A \\A^2 &= A\end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}(A + B)B &= I_n B = B \\AB + B^2 &= B \\0_n + B^2 &= B \\B^2 &= B\end{aligned}$$

Q.E.D.

In alternativa:

$$\begin{aligned}A + B &= I_n \\A &= I - B \\0_n = AB &= (I - B)B = B - B^2 \\B^2 &= B\end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}A + B &= I_n \\B &= I - A \\0_n = AB &= (I - A)A = A - A^2 \\A^2 &= A\end{aligned}$$

Q.E.D.

2. Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 \end{pmatrix}$$

Calcolare la matrice di T rispetto alla base

$$\mathcal{E} = \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Qual è l'espressione di $T(\mathbf{u}_1)$ nella base $\mathcal{B}$?

Soluzione Per calcolare la matrice standard occorre calcolare:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{\mathcal{E}}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{\mathcal{E}}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{\mathcal{E}}} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da cui

$$M_{\mathcal{E}}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Il calcolo per la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ è analogo. Conviene però sfruttare la relazione di similitudine che esiste tra le matrici $M_{\mathcal{B}}(T)$ e $M_{\mathcal{E}}(T)$. Precisamente: calcoliamo la matrice del cambiamento di coordinate $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}$ mediante l'algoritmo di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Segue allora

$$M_{\mathcal{B}}(T) = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} M_{\mathcal{E}}(T) P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$$

ossia

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 18 & 10 \\ -8 & -5 & -5 \\ -10 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

Per rispondere all'ultima domanda: l'espressione di $T(\mathbf{u}_1)$ si ricava dalla prima colonna della matrice appena calcolata.

$$T(\mathbf{u}_1) = 22\mathbf{u}_1 - 8\mathbf{u}_2 - 10\mathbf{u}_3$$

□

3. Sia data la retta r passante per l'origine e avente vettore di direzione

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

. Calcolare le coordinate della proiezione ortogonale H del punto $P(2, -3, 0)$ su r .

Soluzione Le equazioni parametriche della retta r sono

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Detto $\vec{u} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ calcoliamo

$$proj_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{2 - 3 + 0}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e quindi il punto cercato è $H(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.

In alternativa: Sia π il piano per P perpendicolare a r , esso ha equazione:

$$(x - 2) + (y + 3) + z = 0$$

e calcoliamo $\pi \cap r$:

$$(t - 2) + (t + 3) + t = 0 \quad 3t + 1 = 0 \quad t = -\frac{1}{3}$$

ottenendo di nuovo il punto $H(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$

4. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

calcolare

- Il polinomio caratteristico $c_A(x)$;
- Gli autovalori di A ;
- Una base per ciascun autospazio;
- La molteplicità algebrica e geometrica di ciascun autovalore.

Dire infine se la matrice è diagonalizzabile, trovare l'eventuale matrice diagonale e l'eventuale matrice diagonalizzante.

Soluzione Essendo la matrice A triangolare inferiore il determinante è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale principale. Si vede dunque facilmente che

$$C_A(x) = (x-1)^2(x+1)(x-3)$$

Gli autovalori sono dunque $\lambda_1 = 1$ (doppio) $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$.

Calcolo di E_{-1} . Dobbiamo risolvere il sistema con matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Riducendo nella forma a gradini ridotta si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque l'insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

ed una base di E_{-1} è costituita dal solo vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calcolo di E_3 . Dobbiamo risolvere il sistema con matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Riducendo nella forma a gradini ridotta si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque l'insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

ed una base di E_3 è costituita dal solo vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calcolo di E_1 . Dobbiamo risolvere il sistema con matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Riducendo nella forma a gradini ridotta si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque l'insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t \\ -2s + \frac{2}{3}t \\ s \\ t \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

ed una base di E_3 è costituita dai vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dal punto precedente risulta che le molteplicità geometriche degli autovalori sono: 1 per λ_2 e λ_3 , 2 per λ_1 . Queste coincidono dunque con le molteplicità algebriche e la matrice è pertanto diagonalizzabile.

La forma diagonale è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla matrice diagonalizzante

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$