

Esercizi Lezione 6

1. Risolvere i seguenti sistemi con il metodo dell'eliminazione di Gauss, (cfr. Esercizi Lezione 5). In entrambi i casi esprimere l'insieme delle soluzioni come un sottospazio affine di un opportuno $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w - x - y + 2z = 1 \\ 2w - 2x - y + 3z = 3 \\ -w + x - y = -3 \end{cases}$$

2. Considerate le seguenti matrici come matrici dei coefficienti di un sistema omogeneo, determinare in ciascun caso le soluzioni base del sistema ed esprimere la soluzione generale come combinazione lineare di soluzioni base.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & 0 & -3 & 7 \\ -3 & 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Se A è una matrice $m \times n$ e B è una matrice $n \times r$ allora l'elemento di posto (i, j) di AB è ottenuto moltiplicando la i -esima riga di A per la j -esima colonna di B , per definizione di prodotto tra matrici.

Verificare che detta

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(matrice **Identità**) e indicate con E_1, E_2, E_3, E_4 le colonne della matrice I , allora $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la cosiddetta base canonica di $\mathbb{R}^4$. Verificare inoltre che se A è una matrice 4×4 allora AE_i , per $i = 1, \dots, n$ è la i -esima colonna di A .

4. Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

allora, dette b_1, b_2 le due colonne di B verificare che AB si può ottenere anche calcolando $(Ab_1 \quad Ab_2)$.

Osservare anche che in tal modo ogni colonna di AB è ottenuta come combinazione lineare delle colonne di A con coefficienti presi dalle colonne di B , ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Verificare se il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a

$$\left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ -17 \end{pmatrix} \right\rangle$$