

Esercizi Lezione 7

1. Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Si calcolino AB , $(AB)^T$, A^T , B^T , $B^T A^T$ verificando che $(AB)^T = B^T A^T$

2. Una matrice si dice simmetrica se $A^T = A$. Verificare che, date le matrici A e B dell'esercizio precedente, le matrici $A + A^T$, BB^T , $B^T B$ sono tutte matrici simmetriche.

Dimostrare che ciò è vero in generale, cioè: data comunque una matrice quadrata $n \times n$ A , la matrice $A + A^T$ è simmetrica. Inoltre, per qualunque matrice A , (anche non quadrata) $A^T A$ e AA^T sono matrici simmetriche.

3. Se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

verificare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

è la matrice inversa. Verificare che la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

non è invertibile.

4. Usare la matrice inversa della matrice dei coefficienti per risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 4y = -2 \end{cases}$$

5. Data la matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

per verificare se essa è invertibile occorre determinare, se possibile, una matrice 3×3 C per la quale valga $AC = CA = I$ dove I è la matrice identità 3×3 . Scritta la matrice da determinarsi C , matrice di incognite, a blocchi, utilizzando le colonne $C = (C_1, C_2, C_3)$ e analogamente scrivendo la matrice identità per colonne $I = (E_1, E_2, E_3)$, determinare una eventuale matrice C significa studiare l'equazione matriciale

$$A(C_1, C_2, C_3) = (E_1, E_2, E_3)$$

Ciò è equivalente allo studio di tre sistemi lineari aventi tutti la stessa matrice dei coefficienti A , ma diverse colonne dei termini noti:

$$AC_1 = E_1, \quad AC_2 = E_2, \quad AC_3 = E_3$$

La risoluzione di tali sistemi mediante l'algoritmo di eliminazione di Gauss si può fare simultaneamente riducendo in forma a gradini la matrice completa con tutte le colonne dei termini noti

$$(A|I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verificare che riducendo la matrice precedente nella forma a gradini si ottiene

$$(I|C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & -3/2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificare infine che C è effettivamente l'inversa di A .

6.(Analogo al precedente). Data la matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -4 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

ragionando come nell'esercizio precedente, verificare se essa sia invertibile richiede la riduzione a gradini della matrice

$$(A|I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verificare che riducendo la matrice $(A|I)$ a gradini si arriva alla forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

e pertanto dalla terza riga possiamo concludere che i sistemi che stiamo cercando di risolvere non sono tutti compatibili e che quindi non è possibile determinare la matrice $C = A^{-1}$, ossia la matrice data non è invertibile.