Esercizi Lezione 8

1. Risolvere la seguente equazione matriciale, assumendo che che le matrici indicate siano tali per cui tutte le operazioni indicate siano definite):

$$A^{-1}(BX)^{-1} = (A^{-1}B^3)^2$$

(Risolvere rispetto alla X).

2. Dimostrare per induzione le seguenti formule:

(1) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
(2) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 8 \\ 3x + 9y + 6z = 12 \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$$

Contare il numero di moltiplicazioni (o divisioni) necessarie per ridurre la matrice completa nella forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Contare inoltre il numero di moltiplicazioni necessarie per risolvere il sistema effettuando la sostituzione a ritroso e sommarle al numero di operazioni ottenuto prima.

4. Contare il numero di moltiplicazioni necessarie per ridurre la matrice completa dell'esercizio precedente nella forma ridotta a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dove gli zero di ciascuna colonna sono ottenuti immediatamente dopo aver ottenuto il pivot ridotto a 1 di quella colonna. Confrontare questo numero con quello dell'esercizio precedente. Che cosa suggerisce questo confronto riguardo l'"efficienza" di ciascun algoritmo?

5. Supponiamo di avere un sistema lineare con n equazioni e n incognite: $AX = B$. Supponiamo di risolverlo in due modi diversi:

(1) Procediamo con l'eliminazione di Gauss fino ad una forma triangolare e facciamo poi un sostituzione a ritroso;
(2) oppure procediamo con l'eliminazione di Gauss-Jordan fino ad arrivare ad una forma ridotta a scala del sistema.

Possiamo dare una stima del numero di operazioni da fare in ciascun caso? (Per numero di operazioni intendiamo il numero di moltiplicazioni ed ignoriamo il numero di addizioni assumendo che le addizioni sono molto più facilmente e velocemente eseguibili da un computer). Quale dei due è più"efficiente"? Per far ciò rispondiamo alle seguenti domande.

In una matrice completa $n \times (n+1)$ mostrare che occorrono n operazioni per creare il primo pivot 1 (dividendo ciascun elemento della prima riga per a_{11}) (Osserviamo che non è necessario considerare la operazione a_{11}/a_{11} che dà sicuramente 1).

Dimostrare ora che occorrono n moltiplicazioni per "sistemare" la seconda riga facendo apparire 0 sotto al primo pivot.

Una volta che l'intera prima colonna è stata sistemata avremo una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}$$

Dimostrare che per ottenere questa forma sono state necessarie (nella peggiore delle ipotesi) n^2 operazioni.

Dimostrare che il numero totale delle operazioni necessarie per ottenere

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * \end{pmatrix}$$

è $n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2$

Dimostrare che il numero totale delle operazioni necessarie per la sostituzione a ritroso è $1 + 2 + \cdots + (n-1)$.

Usare le formule dimostrate nell'esercizio **2.** per ottenere che il numero totale di operazioni è $\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$. Per grandi valori di n ciò significa per la soluzione col metodo di Gauss sono necessarie circa $\frac{1}{3}n^3$ operazioni.

Dimostrare infine che svolgendo invece la riduzione completa di Gauss-Jordan, facendo in modo di ottenere zero sia sopra che sotto ciascun pivot per ciascuna colonna al procedere da sinistra a destra, il numero delle operazioni necessarie è $n\frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^3+n^2}{2}$, e pertanto, per grandi valori di n il numero di operazioni è circa $\frac{1}{2}n^3$.

Ad esempio se $n = 100$, nel primo metodo occorre fare circa 333mila operazioni, nel secondo caso circa 500mila.

6. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) Calcolare la matrice A^{-1} con la formula del determinante ed usarla per risolvere i tre sistemi $AX = b_1$, $AX = b_2$, $AX = b_3$.
(2) Risolvere i tre sistemi contemporaneamente riducendo a scala la matrice $(A|b_1|b_2|b_3)$ con il metodo di Gauss-Jordan.
(3) Contare attentamente il numero di moltiplicazioni effettuate bel primo caso e nel secondo caso. Verificare che anche per sistemi 2×2 uno dei due metodi è preferibile. È ragionevole quindi che per sistemi più grandi la differenza sia ancora più evidente.

(Il calcolo di un determinante 2×2 richiede due moltiplicazioni, dunque, poiché la soluzione di un sistema 2×2 usando la regola di Cramer richiede il calcolo di tre determinanti nonché il quoziente di due determinanti avremo che un tale sistema richiederà 8 operazioni. Tenendo conto che la matrice dei coefficienti è la stessa i tre sistemi si possono risolvere con Cramer usando in tutto 20 operazioni. Riducendo invece a scala con il metodo di Gauss-Jordan la matrice completa $(A|b_1|b_2|b_3)$ si ottengono le soluzioni con 11 operazioni. Circa la metà).