

Esercizi Lezione 9

1. In ciascuno dei seguenti casi dimostrare che l'affermazione è vera o scrivere un controesempio per stabilire che l'affermazione è falsa.

- (1) Se A è una matrice non nulla allora essa è invertibile.
- (2) Se A è invertibile allora è una matrice non nulla.
- (3) Se $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ allora A è invertibile.
- (4) Se $A^2 = A$ e A non è la matrice nulla allora A è invertibile.
- (5) Se A e B sono due matrici invertibili allora la loro somma e la loro differenza è una matrice invertibile.
- (6) Se A e B sono due matrici quadrate e se $AB = 0$ allora o $A = 0$ oppure $B = 0$.
- (7) Se A e B sono due matrici quadrate, A invertibile, se $AB = 0$ allora $B = 0$.
- (8) Se per qualche matrice colonna B il sistema $AX = B$ non è compatibile allora il sistema $AX = 0$ non ammette soluzioni.
- (9) Se A^3 è invertibile allora A è invertibile.

2. Una matrice A si dice **autoinversa** se $A^{-1} = A$, inoltre una matrice A si dice **idempotente** se $A^2 = A$. Dimostrare che:

- (1) A è autoinversa se e solo se $A^2 = I$.
- (2) Se A è autoinversa allora la matrice $E = \frac{1}{2}(I - A)$ è idempotente.
- (3) Se E è idempotente allora $A = I - 2E$ è autoinversa.

3. Dimostrare che se A è una matrice invertibile e $BA = CA$ allora $B = C$. Dare un esempio (controesempio) che dimostri che il risultato precedente non vale se la matrice A non è invertibile.

4. Esprimere ciascuna delle matrici seguenti come prodotto di matrici elementari, se possibile.

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$