

Risolvere i seguenti esercizi

1. Sia  $V$  l'insieme dei numeri reali strettamente positivi. Definiamo due operazioni su  $V$  come segue. Una operazione detta "somma" denotata  $\oplus$ :

$$v \oplus w = vw$$

dove il membro a destra è la moltiplicazione ordinaria tra i due numeri reali  $v$  e  $w$ . Definiamo inoltre una operazione esterna ("moltiplicazione" per gli scalari)  $r \cdot v = v^r$ . Verificare che  $V$  con queste operazioni è uno spazio vettoriale.

2. Scrivere la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

come prodotto di matrici elementari.

3. Se indichiamo una matrice quadrata  $n \times n$  come  $M = (C_1, C_2, \dots, C_n)$  evidenziandone così le colonne  $C_1, \dots, C_n$  verificare allora che

$$\det(hC_1 + kB, C_2, \dots, C_n) = h \det(C_1, C_2, \dots, C_n) + k \det(B, C_2, \dots, C_n)$$

con  $h, k \in \mathbb{R}$ ,  $B \in \mathbb{R}^n$ . (La funzione determinante è una funzione lineare sulle colonne della matrice).

4. Sia assegnato il piano di equazione  $x + y + z - 1 = 0$ . Determinare un vettore applicato  $\overrightarrow{PQ}$ , giacente sul piano e rappresentante del vettore  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}$ .

5. Determinare i fuochi dell'ellisse di equazione  $9x^2 + 16y^2 = 144$ . Disegnarla.

6. Scrivere un'equazione cartesiana del piano passante per i tre punti

$$P_1(2, 0, 0), \quad P_2(0, 4, 0), \quad P_3(0, 0, 3)$$

7. Calcolare l'area del triangolo di vertici  $P_1, P_2, P_3$ .

7. Diagonalizzare ortogonalmente la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(trovare autovalori, autovettori, matrice diagonalizzante e forma diagonale).

8. Determinare se la seguente applicazione lineare è iniettiva, suriettiva. Calcolarne nucleo e immagine.

$$T : P_2 \rightarrow M(2 \times 2)$$

definita da

$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) & p(2) \\ p(1) - p(2) & 2p(1) \end{pmatrix}$$

9. Calcolare l'equazione della retta per  $P_0(6, 0, 3)$ , incidente e perpendicolare alla retta  $x = -1 + t, y = 2 + 2t, z = 5$ .

10. Siano  $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$  e  $W = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ , sottospazi di  $\mathbb{R}^4$ .

Calcolare le equazioni cartesiane di  $U \cap W$ .