Esercizi Lezione 1

1. Sia $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Dire se le seguenti relazioni sono d'equivalenza. Se lo sono dire anche qual è la relativa partizione di A. Se non lo sono dire quale delle tre proprietà è verificata e quale no.

(1) $\{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$
(2) $\{(0,0), (0,2), (2,0), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$
(3) $\{(0,0), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$
(4) $\{(0,0), (1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$
(5) $\{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,2), (3,3)\}$

Soluzione Una relazione su A è un sottoinsieme di $A \times A$. Quindi tutti gli esempi dell'esercizio sono relazioni su A. Per verificare se sono d'equivalenza occorre verificare se esse soddisfano le proprietà: riflessiva, simmetrica, transitiva.

(1) $R = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$. Riflessiva: è verificata in quanto ogni elemento di A è in relazione con se stesso giacché la relazione contiene $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$. Simmetrica: se $(a,b) \in R$ allora $(b,a) \in R$, verificata. Transitiva: se $(a,b) \in R$, $(b,c) \in R$ allora $(a,c) \in R$ non c'e' nulla da verificare.

La partizione di A indotta da questa relazione è $A = \{0\} \cup \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$.

(2) Riflessiva: NO perché non contiene tutte le coppie $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$: manca $(1,1)$. Quindi non è di equivalenza.
(3) Riflessiva: OK. Simmetrica: ogni volta che compare (a,b) ci deve essere anche (b,a): questo è verificato. Transitiva: OK, niente da verificare. R è d'equivalenza. La relativa partizione è $A = \{0\} \cup \{1,2\} \cup \{3\}$.
(4) Riflessiva: OK come sopra. Simmetrica: OK come sopra. Transitiva: NO. $(1,3) \in R, (3,2) \in R$ però $(1,2) \notin R$. Non è d'equivalenza.
(5) Riflessiva: OK. Simmetrica: NO. Infatti, c'e' $(1,2)$ ma non $(2,1)$. Non è d'equivalenza.

2. Sia $A = \mathbb{Z}$. Definiamo le seguenti relazioni su $\mathbb{Z}$:

(1) xRy se $x = 7y$
(2) xRy se $x - y = 5k$ per qualche intero $k \in \mathbb{Z}$
(3) xRy se $MCD(x,y) = 1$ ($MCD(x,y)$ indica il massimo comun divisore di x e y). Dire se esse sono riflessive, simmetriche o antisimmetriche, transitive.

Soluzione

(1) xRy se $x = 7y$. Non è riflessiva: $x = 7x$ non è verificata per ogni x. Non è simmetrica: se $x = 7y$ certamente non si avrà $y = 7x$ in generale. È antisimmetrica: Se $x = 7y$ e $y = 7x$ allora $x = y = 0$. Non è transitiva: Se $x = 7y$ e $y = 7z$ non è vero che, in generale, $x = 7z$. (La relazione, a differenza dell'esercizio precedente, è composta da infinite coppie del tipo $R = \{(0,0), (7,1), (14,2), (21,3) \dots\}$).
(2) xRy se $x - y = 5k$ per qualche intero $k \in \mathbb{Z}$ Riflessiva: xRx in quanto $x - x = 5(0)$ per qualunque x. Simmetrica: Se xRy allora $x - y = 5k$ di conseguenza $y - x = 5(-k)$ e quindi yRx. Transitiva: Se xRy, cioè $x - y = 5k$, e se yRz cioè $y - z = 5h$, allora $x - z = (x - y) + (y - z) = 5k + 5h = 5(h + k)$ e quindi xRz.
(3) Riflessiva: xRx NO. Infatti, ad esempio, $MCD(5,5) = 5$. Simmetrica: $xRy \implies yRx$ OK. Infatti, $MCD(x,y) = MCD(y,x)$. Transitiva: NO. Ad esempio, $MCD(2,3) = 1, MCD(3,4) = 1$ mentre $MCD(2,4) \neq 1$.

3. Determinare se le seguenti applicazioni sono iniettive, suriettive, biiettive (o biunivoche) oppure no.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 - x$
(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$
(3) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definita da $f(x) = x^2$ (con $R_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$).
(4) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f(m, n) = 2^m 3^n$
(5) $f : \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$ con $f(x) = x^2 - 2x$
(6) $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ ($2\mathbb{N}$ indica l'insieme dei numeri pari) con $f(n) = 2n$.
(7) Costruire una applicazione biunivoca $f : \mathbb{N} \to \{y \in \mathbb{Z} | y \geq -3\}$

Soluzione

(1) Non è iniettiva: $f(0) = f(1)$. Non è suriettiva: ad esempio l'equazione $x^2 - x = -1$ non ha soluzioni (reali).
(2) Non è iniettiva: $f(-1) = f(1)$. Non è suriettiva $x^2 = -1$ non ha soluzioni (reali).
(3) Con la restrizione indicata la funzione è sia iniettiva che suriettiva ed è dunque biunivoca.
(4) Se $2^m 3^n = 2^h 3^k$ allora $(m, n) = (h, k)$ per l'unicità della fattorizzazione in numeri primi. Dunque l'applicazione è iniettiva. Non è suriettiva: ad esempio, non è possibile scrivere $5 = 2^m 3^n$ sempre per l'unicità della fattorizzazione.
(5) La funzione non è iniettiva in quanto $f(0) = f(2)$. È però suriettiva in quanto l'equazione $x^2 - 2x = a$ ha sempre soluzione per $a \geq 1 : x^2 - 2x - a = 0$, $\Delta = 4 + 4a > 0$.
(6) La funzione è iniettiva: $2n = 2m \implies n = m$. La funzione è suriettiva: se $k \in 2\mathbb{N}$ allora $k = 2h$ per qualche intero h e quindi $k = f(h)$. Quindi l'applicazione è biunivoca.
(7) Basta prendere, ad esempio la funzione $f : \mathbb{N} \to \{y \in \mathbb{Z} | y \geq -3\}$ definita da $f(n) = n - 3$.

4. Quali delle seguenti è una partizione di di $\mathbb{Z}$?

(1) $A = \{x \in \mathbb{Z} | x \text{ è pari}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} | x \text{ è dispari}\}$
(2) $A = \{x \in \mathbb{Z} | x > 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} | x < 0\}$
(3) $A = \{x \in \mathbb{Z} | x = 3n, n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | x = 3n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z} | x = 3n + 2, n \in \mathbb{Z}\}$
(4) $A = \{x \in \mathbb{Z} | x < -10\}$ $B = \{x \in \mathbb{Z} || x| \leq 10\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z} | x > 10\}$
(5) $A = \{x \in \mathbb{Z} | x \text{ non è divisibile per } 3\}$, $B = 2\mathbb{N}$, $C = \{x \in \mathbb{Z} | x = 6n + 3, n \in \mathbb{Z}\}$

Soluzione

(1) È una partizione in quanto un numero o è pari o è dispari ma non entrambe le cose. In altre parole, $\mathbb{Z} = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$
(2) Non è una partizione in quanto $A \cup B \neq \mathbb{Z}$ (manca lo zero), anche se $A \cap B = \emptyset$.
(3) È una partizione: $A \cup B \cup C = \mathbb{Z}$ (ogni intero diviso per 3 dà come resto 0,oppure 1 oppure 2.) Inoltre $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$.
(4) È una partizione:$A \cup B \cup C = \mathbb{Z}$ (ogni intero o è minore di -10,oppure compreso o uguale tra -10 e 10 oppure m̀aggiore di 10.) Inoltre $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$.
(5) Non è una partizione perché, ad esempio, $4 \in A \cap B$ e quindi gli insiemi non

sono disgiunti.