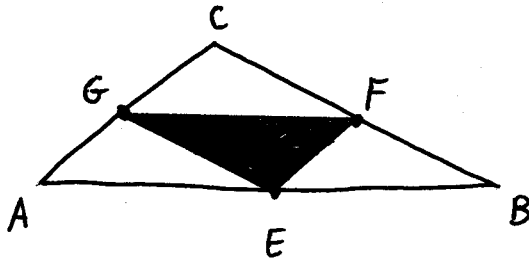


1)



$$\text{Area } \triangle EFG \stackrel{?}{=} \frac{1}{4} \text{Area } \triangle ABC$$

$$\text{Area } \triangle EFG =$$

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} & \frac{y_A + y_B}{2} & 1 \\ \frac{x_B + x_C}{2} & \frac{y_B + y_C}{2} & 1 \\ \frac{x_A + x_C}{2} & \frac{y_A + y_C}{2} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{16} \left[\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_B & y_C & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{8} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

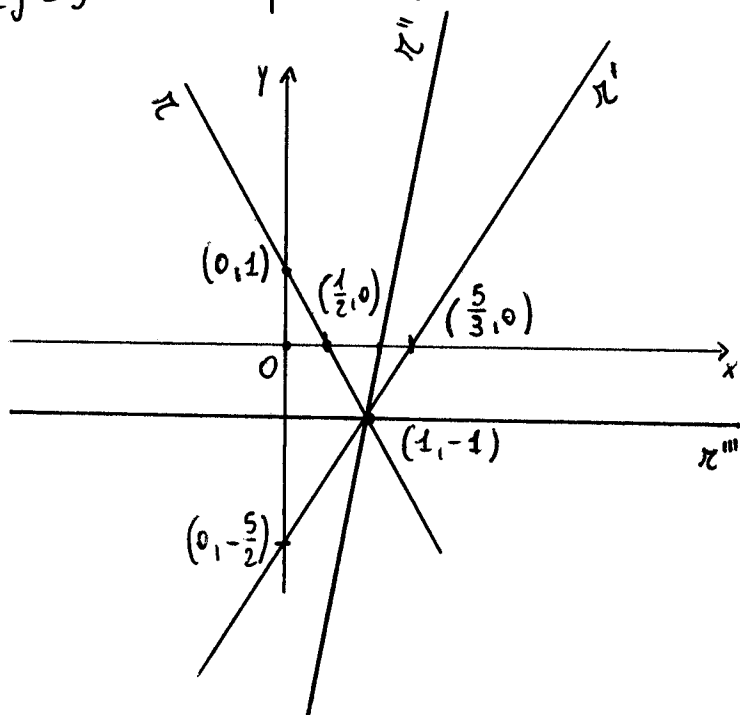
$$\frac{\text{Area } \triangle EFG}{\text{Area } \triangle ABC} = \frac{\frac{1}{8} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}}{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}$$

2)

$$\pi: 2x + y = 1$$

$$\pi^1: 3x - 2y = 5$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7 \neq 0 \quad \text{incidenti}$$



$$\pi^2: (2x + y - 1) + (3x - 2y - 5) = 0 \Rightarrow 5x - y - 6 = 0$$

$$\pi^3: 3(2x + y - 1) - 2(3x - 2y - 5) = 0 \Rightarrow 7y + 7 = 0$$

3) $\pi \pi'$ in $P(1, -1)$ PRIMO MODO

retta passante per $P(1, -1)$ e $P_1(-2, 4)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 \\ -2-1 & 4+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5(x-1) + 3(y+1) = 0 \Rightarrow \underline{5x + 3y - 2 = 0}$$

SECONDO MODO

Senza conoscere il punto $(1, -1)$ posso scrivere:

$$\lambda(2x + y - 1) + \mu(3x - 2y - 5) = 0$$

Impongo il passaggio per il punto $(-2, 4)$ sostituendo $x = -2$ e $y = 4$ nell'equazione del fascio.

$$\lambda(-4 + 4 - 1) + \mu(-6 - 8 - 5) = 0$$

$$-\lambda - 19\mu = 0 \quad \text{Se } \lambda = 1 \Rightarrow \mu = -\frac{1}{19}$$

$$\text{Se } \mu = -1 \Rightarrow \lambda = 19$$

$$\text{Se } \mu = 1 \Rightarrow \lambda = -19$$

Andando a sostituire tali valori di λ e μ nell'equazione del fascio:

$$19(2x + y - 1) - (3x - 2y - 5) = 0$$

$$38x + 19y - 19 - 3x + 2y + 5 = 0$$

$$35x + 21y - 14 = 0$$

Divido tutto per 7

$$\underline{5x + 3y - 2 = 0}$$

$$4) \quad \pi: x-y+1=0 \quad \pi': -3x+y+2=0 \quad P(1, -2)$$

$$\lambda(x-y+1) + \mu(-3x+y+2) = 0$$

$$\lambda(1+2+1) + \mu(-3-2+2) = 0$$

$$4\lambda - 3\mu = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \mu = \frac{4}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow x-y+1 - 4x + \frac{4}{3}y + \frac{8}{3} = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 3y + 3 - 12x + 4y + 8 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{-9x + y + 12 = 0}$$

$$\pi: x-y+1=0 \quad \pi': -3x+y+2=0 \quad \pi'': x-2y+3=0$$

$$\lambda(x-y+1) + \mu(-3x+y+2) = 0 \text{ è una generica retta del fascio}$$

$$F: (\lambda - 3\mu)x + (-\lambda + \mu)y + \lambda + 2\mu = 0$$

Impongo il parallelismo
tra F e π'' usando i
parametri direttori di π''

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \lambda - 3\mu & -\lambda + \mu \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda + \mu + 2\lambda - 6\mu = 0$$

$$\Rightarrow \lambda - 5\mu = 0 \quad \Rightarrow \begin{array}{l} \mu = 1 \\ \lambda = 5 \end{array}$$

Sostituisco nell'equazione del fascio

$$5(x-y+1) + (-3x+y+2) = 0$$

$$5x - 5y + 5 - 3x + y + 2 = 0$$

$$\underline{2x - 4y + 7 = 0}$$

$$\pi: x-y+1=0$$

$$\pi': -3x+y+2=0$$

$$\pi'': x=0$$

$$\lambda(x-y+1) + \mu(-3x+y+2) = 0$$

$$(\lambda-3\mu)x + (-\lambda+\mu)y + \lambda+2\mu = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda-3\mu & -\lambda+\mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda+\mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 1$$

$$x-y+1-3x+y+2=0 \Rightarrow -2x+3=0$$

5) $P(1, -2)$ $\pi: 3x-2y=1$

Basta scrivere l'equazione del fascio di rette improprio e imporre il passaggio per il punto:

$$3x-2y-1+k=0$$

$$3(1)-2(-2)-1+k=0$$

$$3+4-1+k=0$$

$$k = -6 \Rightarrow 3x-2y-1-6=0 \Rightarrow \boxed{3x-2y-7=0}$$

6) $\pi: x+y+1=0$ $\pi': x+y+5=0$

La retta mediana sarà una retta passante per $(0, \frac{y_1+y_2}{2})$ e $(\frac{x_1+x_2}{2}, 0)$ ovvero $(0, -3)$ e $(-3, 0)$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y+3 \\ -3-0 & 0+3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x+3y+9=0 \Rightarrow x+y+3=0: \pi''$$

$$3 = e'' = \frac{e+e'}{2} = \frac{1+5}{2}$$