

ESERCIZI LEZIONE 24

$$① y = 5x^2 - 30x + 49$$

$$y - 49 = 5(x - 6x)$$

$$y - 49 + 45 = 5(x - 6x + 9)$$

$$y - 4 = 5(x - 3)^2$$

PRIMA

$$\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y - 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y' = 5x'^2}$$

VERTICE

$$\begin{cases} 0 = x - 3 \\ 0 = y - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \quad V(3; 4)$$

FUOCO

$$F(0; \frac{1}{20})$$

$$F \begin{cases} 0 = x - 3 \\ \frac{1}{20} = y - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{81}{20} \end{cases} \quad F(3; \frac{81}{20})$$

DIRETTRICE

$$d': y' = -\frac{1}{20}$$

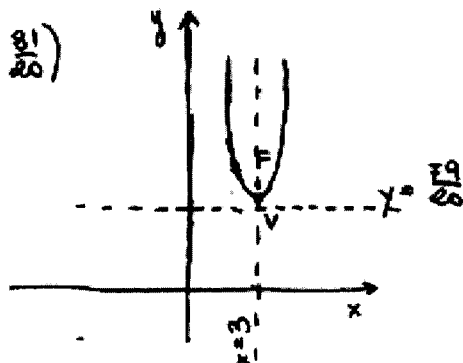
$$d: -\frac{1}{20} = y - 4$$

$$y = \frac{79}{20}$$

ASSE DI SIMMETRIA

$$x' = 0$$

$$x = 3$$



$$(2) \quad x^2 - 4x = 8y - 28$$

$$4(2y - 7) = (x^2 - 4x)$$

$$4(2y - 7 + 1) = (x^2 - 4x + 4)$$

$$8(y - 3) = (x - 2)^2$$

CONIUGATO

$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$$

$$8y' = x'^2$$

$$y' = \frac{1}{8} x'^2$$

VERTICE

$$\begin{cases} 0 = x - 2 \\ 0 = y - 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$V(2; 3)$$

ASSE DI SIMMETRIA

$$x = 2$$

FUOCO

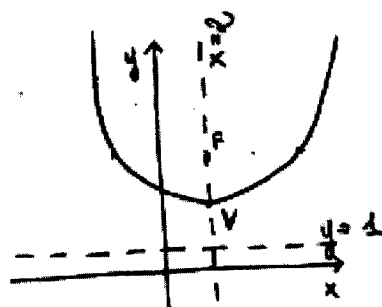
$$\begin{cases} 0 = x - 2 \\ 2 = y - 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$F(2; 5)$$

DIRETTRICE

$$-2 = y - 3$$

$$y = 1$$



$$(3) \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$V(4; 0)$$

$$V'(-4; 0)$$

$$c = \sqrt{16 + 9} = 5$$

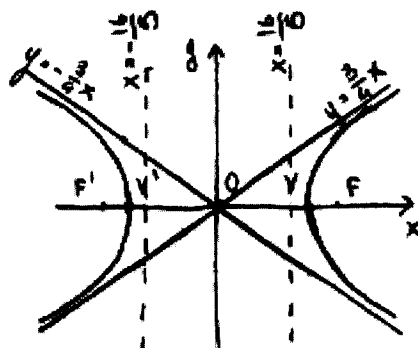
$$F(5; 0)$$

$$F'(-5; 0)$$

$$e = \frac{5}{4}$$

$$\text{ASINTOTI} \quad y = \pm \frac{3}{4} x$$

$$\text{DIRETTRICI} \quad x = \pm \frac{16}{5}$$



$$(4) \quad 9x^2 - 72x - 16y^2 - 32y = 16$$

$$9(x^2 - 8x) - 16(y^2 + 2y) = 16$$

$$9(x^2 - 8x + 16) - 16(y^2 + 2y + 1) = 16 + 16 \cdot 9 - 16 \cdot 1$$

$$9(x-4)^2 - 16(y+1)^2 = 144$$

CONIUGATO

$$\begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

$$9x'^2 - 16y'^2 = 144$$

$$\frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{9} = 1$$

FUOCHI

$$F \begin{cases} 5 = x - 4 \\ 0 = y + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 9 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$F' \begin{cases} -5 = x - 4 \\ 0 = y + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$c = \frac{5}{4}$$

$$d: x = \pm \frac{16}{5}$$

$$\frac{16}{5} = x - 4 \rightarrow x = \frac{36}{5}$$

$$-\frac{16}{5} = x - 4 \rightarrow x = \frac{4}{5}$$

$$V: \begin{cases} 4 = x - 4 \\ 0 = y + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$V': \begin{cases} -4 = x - 4 \\ 0 = y + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

ASSI DI SIMMETRIA

$$x = 4$$

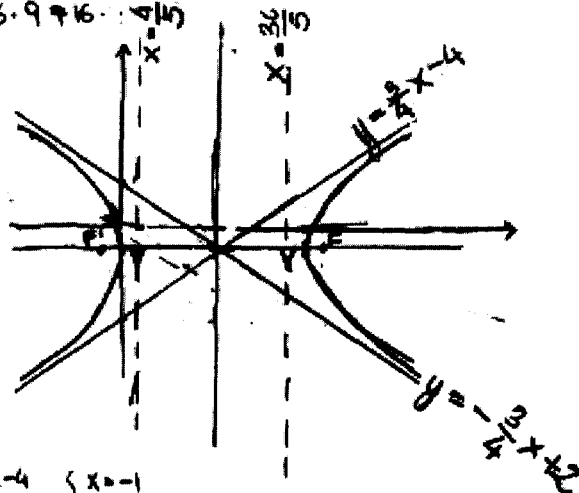
$$y = -1$$

ASSE TRASVERSO: sulla retta $y = -1$ di lunghezza 8

ASINTOTI

$$\frac{3}{4}(x-4) = y+1 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - 3 - 1 = \frac{3}{4}x - 4$$

$$-\frac{3}{4}(x-4) = y+1 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 2$$



$$\textcircled{5} \quad xy=2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y') \end{cases}$$

SOSTITUENDO

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y') \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y') = 2$$

$$\frac{1}{2} (x'^2 - y'^2) = 2$$

$$\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{4} = 1$$

$$\textcircled{6} \quad x^2 + y^2 + ax + by = 0$$

$$ax + by = 0$$

FORMULE PER LA TANGENTE

$$\begin{cases} x = x_1 + t(y_1 - y_0) \\ y = y_1 - t(x_1 - x_0) \end{cases}$$

APPLICANDO

$$\begin{cases} x = t\left(\frac{b}{2}\right) \\ y = -t\left(\frac{a}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{a}{b} x \\ y = -\frac{a}{b} x \left(\frac{a}{2}\right) \end{cases}$$

$$ax + by = 0$$

$$\begin{cases} t = \frac{2}{b} x \\ y = -\frac{a}{b} x \end{cases}$$

C.V.D.

$$\textcircled{7} \quad \begin{cases} y = -x + q \\ x^2 + x^2 - 2qx + q^2 - 4x - 6x + 6q - 12 = 0 \end{cases}$$

$$2x^2 - 2x(5+q) + q^2 + 6q - 12 = 0$$

$$25 + 10q + q^2 - 2q^2 - 12q + 24 = 0$$

$$q^2 + 2q - 4q = 0$$

$$q_{1/2} = 1 \pm \sqrt{50} = 1 \pm 5\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} y = -x + 1 + 5\sqrt{2} \\ y = -x + 1 - 5\sqrt{2} \end{cases}$$

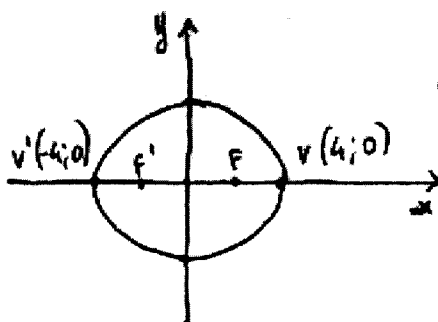
⑧ $V(\pm 4; 0)$ $F(\pm 2; 0)$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$4 = 16 - b^2$$

$$b^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$



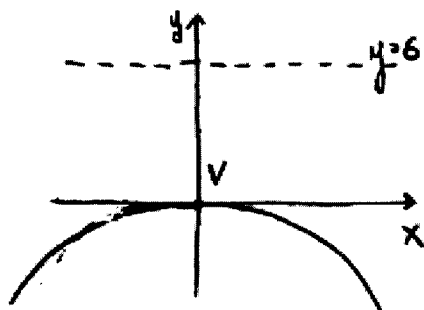
⑨ $V(0; 0)$

$d: y = 6$

$$-\frac{1}{4a} = 6$$

$$a = -\frac{1}{24}$$

$$y = -\frac{1}{24}x^2$$



⑩ $F(0; \pm 2)$

$e = \frac{1}{9}$

$$\frac{1}{9} = \frac{c}{a}$$

$$a = 18$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = 324 - 4 = 320$$

$$\frac{x^2}{324} + \frac{y^2}{320} = 1$$

⑪ $V(\pm 3; 0)$ $F(\pm 4; 0)$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$16 = 9 + b^2$$

$$b^2 = 7$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7} = 1$$

(12) $C(1; -2) \quad S: x - y + 1 = 0$

RAGGIO (distanza punto-retta)

$$\frac{|1 - (-2) + 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$C = 1 + 4 - 8 = -3$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$$

(13) $S: 2x + y - 1 = 0$

$A(-1; 3)$

$r: x + y + 1 = 0$

$$y = -2x + 1$$

$$y_0 = -x_0 - 1$$

TANGENTI IN A:

$$\begin{cases} x = -1 + t(3 - y_0) \\ y = 3 + t(x_0 + 1) \end{cases}$$

SOSTITUENDO $y_0 = -x_0 - 1$

$$\begin{cases} x = -1 + t(3 + x_0 + 1) \\ y = 3 + t(x_0 + 1) \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{x+1}{4+x_0} \\ y = 3 + \frac{x+1}{4+x_0}(x_0+1) \end{cases}$$

$$4y + x_0y = 3 + x x_0 + x + x_0 + 1$$

$$y(4 + x_0) = x(x_0 + 1) + (4 + x_0)$$

$$\begin{cases} 4 + x_0 = 1 \\ x_0 + 1 = -2 \\ 4 + x_0 = 1 \end{cases} \quad x_0 = -3 \quad y_0 = 2$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + C = 0$$

PASSAGGIO PER A $(-1; 3)$

$$1 + 9 - 6 - \textcircled{3} + C = 0$$

8

$$\boxed{x^2 + y^2 + 6x - 4y + \textcircled{3} = 0}$$

Esercizio 13 Dato la retta $S: 2x + y - 1 = 0$, considero la perpendicolare p ad S passante per il punto $A(-1, 3)$: essa avrà equazione del tipo $x - 2y + k = 0$ e imponendo il passaggio per $A(-1, 3)$:

$$-1 - 6 + k = 0 \Rightarrow k = 7.$$

Dalla geometria elementare sappiamo che il centro della circonferenza desiderata si trova su p e vogliamo che sia anche su $r: x + y + 1 = 0$. Dovrà allora trovarsi all'intersezione di r e p :

$$\begin{cases} x - 2y + 7 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{risolvendo si trova} \quad \begin{matrix} x = -3 \\ y = 2 \end{matrix}$$

Dunque il centro è $C(-3, 2)$. Il raggio ovviamente sarà uguale a $\overline{CA} = \sqrt{(-1+3)^2 + (3-2)^2} =$

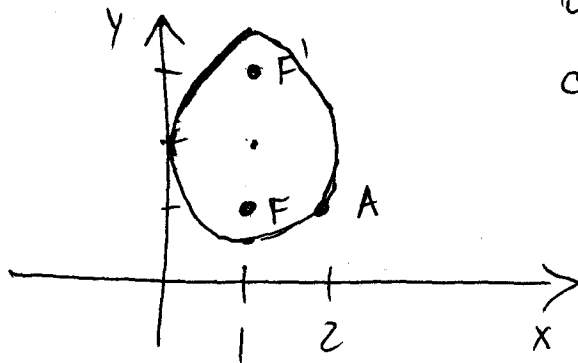
$= \sqrt{5}$. L'equazione è allora

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

ovvero

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 8 = 0$$

Esercizio 14



Si tratta ovviamente
di una ellisse traslata
con centro in $(1, 2)$

$$\text{Ponendo } x' = x - 1 \\ y' = y - 2$$

l'ellisse avrà equazione canonica di tipo

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

nel nuovo riferimento.

Si osserva che l'asse
maggiore, in questo caso
sarà $2b$, cioè $b > a$.

D'altra parte ~~la~~ la distanza focale è chiaramente
2 e quindi $c = 1$. Abbiamo allora $c^2 = \cancel{b}^2 - a^2$

~~ella~~. Per calcolare $2b$, sfruttando la definizione
di ellisse, abbiamo $\overline{AF} + \overline{AF'} = 2b$ e quindi:

$$2b = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2}.$$

Pertanto: $a^2 = 2 - 1 = 1$ e l'equazione è

$$\frac{x'^2}{1} + \frac{y'^2}{2} = 1 \quad \text{ovvero} \quad \frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y-2)^2}{2} = 1$$