14 ottobre 2011

1. Consideriamo la matrice

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo $c_F(x) = x^2 - x - 1$ con radici (autovalori di F) $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (la famosa **sezione aurea**) e $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Gli autovettori sono, rispettivamente:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \phi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \psi \end{pmatrix}$$

Sappiamo allora che, posta $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \phi & \psi \end{pmatrix}$ si ha $P^{-1}FP = diag(\phi, \psi)$, da cui $F = P\begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}P^{-1}$ e quindi $F^n = P\begin{pmatrix} \phi^n & 0 \\ 0 & \psi^n \end{pmatrix}P^{-1}$. Per calcolare esplicitamente F^n, calcoliamo prima

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -\psi & 1 \\ \phi & -1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$F^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \phi\psi^n - \psi\phi^n & \phi^n - \psi^n \\ \phi\psi^{n+1} - \psi\phi^{n+1} & \phi^{n+1} - \psi^{n+1} \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = F^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \phi^n - \psi^n \\ \phi^{n+1} - \psi^{n+1} \end{pmatrix}$$

Da cui

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

La Formula di Binet.

2. Ripetere l'esercizio per la successione definita da

$$\begin{cases} a_0 = 2, a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$