10 ottobre 2011

1. In ciascuno dei seguenti casi dimostrare che l'affermazione è vera o illustrare un controesempio che permetta di stabilire che l'affermazione è falsa. (Le matrici che seguono si intendono quadrate salvo avviso contrario).

(1) Se $A \neq 0$ allora A è invertibile.
(2) Se A è invertibile allora $A \neq 0$.
(3) Se $A^3 = 3I$ allora A è invertibile. Eventualmente scrivere una formula per l'inversa.
(4) Se $A^2 = A$ e $A \neq 0$ allora A è invertibile.
(5) Se A e B sono entrambe invertibili allora $A + B$ è invertibile.
(6) Se $AB = 0$ e $A \neq 0$ allora $B = 0$.
(7) Se A è invertibile e $AC = I$ allora $C = A^{-1}$.
(8) Se $AX = B$ è un sistema che non ammette soluzioni per qualche matrice colonna B allora il sistema $AX = 0$ non ammette soluzioni.
(9) Se $AX = 0$ ammette solo la soluzione nulla allora $AX = B$ ammette, per ogni scelta di B, un'unica soluzione.
(10) Se A^2 è invertibile allora anche A è invertibile.

2. Dimostrare che se A è invertibile e commuta con C allora anche A^{-1} commuta con C.

3. Dimostrare che se le matrici A e B commutano e sono invertibili allora anche A^{-1} e B^{-1} commutano.

4. Scrivere, se possibile, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

come prodotto di matrici elementari.