11 ottobre 2011

1. Abbiamo visto che il determinante gode delle tre seguenti proprietà:

(1) Scambiando due righe il determinante cambia segno;
(2) moltiplicando una riga per uno scalare il determinante si moltiplica per quello scalare;
(3) se una matrice è ottenuta da un'altra aggiungendo ad una riga un multiplo di un'altra riga il determinante non cambia.

Queste tre proprietà si possono riscrivere dicendo semplicemente che se E è una matrice elementare allora

$$\det(EB) = \det E \det B$$

per qualunque matrice (quadrata) B.

Se ne può allora dedurre che se $A \to C$ per mezzo di operazioni elementari, allora

$$C = E_k \cdots E_2 E_1 A$$

e quindi $\det C = \det E_k \cdots \det E_2 \det E_1 \det A$

Osserviamo inoltre che se A non è invertibile allora il suo deteminante è nullo. Infatti riducendo $A \to R$, la sua forma a scala avrà una riga di zeri e quindi $\det R = 0$ il che implica che $\det A = 0$.

Quanto precede ci permette allora di dimostrare il **Teorema del prodotto o di Binet**:

$$(*) \qquad \det(AB) = \det A \det B$$

Infatti, se A è invertibile allora $A = E_1 \cdots E_k$ e dunque $\det A = \det E_1 \cdots \det E_k$ e quindi

$$\det(AB) = \det(E_1 \cdots E_k B) = \det E_1 \cdots \det E_k \det B = \det A \det B$$

Se A non è invertibile non possiamo più usare il ragionamento tramite le matrici elementari. Ragioniamo così: se A non è invertibile mostreremo che allora AB non è invertibile. In tal caso allora $\det(AB) = 0$ e quindi la $(*)$ è verificata essendo zero in ambo i membri.

Mostriamo quindi che se A non è invertibile allora AB non è invertibile. Se per assurdo esistesse una matrice C tale che $(AB)C = I$ allora usando la proprietà associativa: $I = (AB)C = A(BC)$ il che implicherebbe che A possiede una inversa contro l'ipotesi.

2. Sfruttiamo i risultati del paragrafo precedente per dimostrare che

Teorema. *A è invertibile se e solo se* $\det A \neq 0$.

Dimostrazione. Se A è invertibile allora $AA^{-1} = I$ ed il teorema del prodotto ci dà allora che $\det(AA^{-1}) = 1$ e quindi $\det A \neq 0$ e $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$. Viceversa, se $\det A \neq 0$ e riduciamo A nella sua forma a scala ridotta R deve essere $\det R \neq 0$ e quindi R deve essere I e dunque A è invertibile per il teorema della lezione 11.

3. Dimostrazione della regola di Cramer. Dato un sitema $AX = B$ con A quadrata invertibile, scriviamo $A = (A_1, \dots, A_n)$ a blocchi per colonne. Il sistema $AX = B$ si può interpretare come $B = x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$. Calcoliamo allora $\det(A_1, \dots, B, \dots, A_n)$ in cui abbiamo messo la colonna B al posto i-esimo:

$$\det(A_1, \dots, B, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, \sum x_j A_j, \dots, A_n) =$$
$$= \sum x_j \det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_n)$$

Ora nell'espressione $\sum x_j \det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_n)$ tutti quei determinanti in cui ci sono due colonne uguali si annullano. Rimane solo il determinante in cui tutte le colonne sono distinte ossia $= x_i \det(A_1, \dots, A_n)$. Nell'ipotesi che $\det A \neq 0$ avremo dunque

$$x_i = \frac{\det(A_1, \dots, B, \dots, A_n)}{\det A}$$

QED $\square$

4. Ripetere esplicitamente il ragionamento del punto precedente nel caso di una generica matrice 3×3 invertibile. In altre parole, data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

e una colonna di termini noti

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Svolgere esplicitamente i passaggi fatti in precedenza per calcolare i valori delle incognite x_1, x_2, x_3.

Ad esempio, osservare in questo caso che il sistema $AX = B$ è equivalente a scrivere

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}$$

Indicata con A_1 la matrice ottenuta da A sostituendo alla prima colonna la colonna dei termini noti, calcolare il determinante

$$\det A_1 = \det(B, C_2, C_3)$$

Verificare che si ottiene $\det A_1 = x_1 \det A$. Ricavare x_1. Ripetere per x_2 e x_3.