12 ottobre 2011

1. Due matrici quadrate A e B si dicono **simili** se esiste una matrice invertibile P tale che $B = P^{-1}AP$. Verificare che questa relazione è una relazione di equivalenza nell'insieme di tutte le matrici quadrate di ordine n fissato.

2. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Determinare il polinomio caratteristico di A, l'equazione caratteristica di A. Gli autovalori di A, e gli autovettori di A. Disegnare su un diagramma cartesiano gli autospazi corrispondenti agli autovalori trovati. Scrivere 10 autovettori distinti di A. Scrivere due distinte matrici invertibili, P e Q in modo da verificare che A è simile ad una matrice diagonale. Il risultato usando P o Q è lo stesso?

3. Verificare che le due matrici diagonali $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sono simili.

4. Consideriamo la successione dei numeri di Fibonacci (Leonardo Pisano detto Fibonacci, (1170-1250)):

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$$

Questa successione è definita ponendo $a_1 = 1, a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Consideriamo la matrice

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Possiamo allora verificare che

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

etc., e in generale

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$$

Calcolare

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare gli autovalori ed autovettori di F. Determinare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}FP$ sia diagonale. Determinare la forma diagonale di F e verificare che è simile a

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Sfruttare infine la matrice D per calcolare $F^n = PD^nP^{-1}$. Dedurne una formula per l'ennesimo termine a_n della successione di Fibonacci (Formula di Binet).