13 ottobre 2011

1. Gli esempi visti finora di diagonalizzazione di una matrice avevano una particolarità che li rendeva piuttosto semplici: gli autovalori erano tutti distinti. Dimostreremo in seguito che con tale ipotesi una matrice è sempre diagonalizzabile. Mostriamo ora un esempio in cui ciò non accade.

Prendiamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare il suo polinomio caratteristico.

Si trova $c_A(x) = (x-2)(x+1)^2$. Vediamo quindi che -1 è un autovalore di molteplicità algebrica 2.

Calcolare gli autospazi.

Si troverà:

$$E(2) = \{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \}$$

Per noi l'autospazio più interessante è $E(-1)$. Occorre risolvere il SLO avente per matrice dei coefficienti:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 1 e il corrispondente sistema è quindi equivalente all'unica soluzione

$$x + y + z = 0$$

In questo caso possiamo scegliere $y = s, z = t$ come parametri e quindi scrivere le soluzioni come

$$\{ \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \}$$

Una base per questo autospazio è, ad esempio, $\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$.

Per costruire una matrice P opportuna in questo caso occorre scegliere gli autovettori di una base dell'autospazio. Avremo così ad esempio

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Studiare il problema della diagonalizzazione di questa matrice.

3. Sia A una matrice quadrata. Dimostrare o smentire con un controesempio ciascuna delle seguenti affermazioni:

(1) Se A ha autovalori reali allora è diagonalizzabile.
(2) Se A è diagonalizzabile allora ha autovalori distinti.
(3) Se tutti gli autovalori di A sono reali e distinti allora A è diagonalizzabile.
(4) Se A è diagonalizzabile allora la sua trasposta A^T è anch'essa diagonalizzabile.
(5) Ogni matrice invertibile è diagonalizzabile.
(6) Ogni matrice diagonalizzabile è simmetrica.